DICOTOMIA PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES PARCIAIS HIPERBÓLICAS E UM TEOREMA GERAL DE BIFURCAÇÃO DE HOPF

ALOISIO JOSÉ FREIRIA NEVES

Orientador:
Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Setembro - 1982

Para Lourdiney e nossas filhas

Aline, Larissa e Letícia.

AGRADECIMENTOS

Ao orientador Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes, gostaria de externar minha gratidão pela amizade, estímulo, compreensão e pela oportunidade de uma convivência matemática proveitosa e gratificante, sem a qual este trabalho não estaria concluido.

Agradeço também aos Profs. Marco A. Teixeira e Hermano S. Ribeiro, aos colegas do IMECC e do ICMSC – USP, pelo incentivo e ajuda recebida.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Em [19], H. S. Ribeiro estuda um sistema hiperbólico de duas equações diferenciais parciais, com condições de fronteira envolvendo derivadas, proveniente de um problema em linhas de transmissão com perdas, e dá uma versão do Teorema de Bifurcação de Hopf em espaços de dimensão infinita para equações da forma

$$(1) \qquad \frac{dv}{ds} = Av(s) + f(r,v(s)) \qquad (s > 0).$$

Motivados por este trabalho e por trabalhos anteriores, Brayton [1], [2], Crandall e Rabinowitz [3], Henry [7], [8], Lima [12], Lopes [13], Oliveira [15] e Sattinger [20] entre outros, procuramos generalizar alguns dos resultados. Com este objetivo estudamos no Capítulo I um sistema hiperbólico com n equações diferenciais parciais, com condições de fronteira mista, que aparece no livro de Godunov [4], e no Capítulo II demonstramos um Teorema de Bifurcação de Hopf, para equações do tipo acima onde o parâmetro r perturba também a parte ilimitada $A(r)$.

O procedimento adotado no nosso trabalho, para o estudo do Sistema Hiperbólico, é o de transformar o problema dado, em uma equação diferencial ordinária $\dot{x}(t) = Ax(t)$ $(t > 0)$ num espaço de Hilbert H onde A é um operador linear fechado definido num subespaço vetorial denso de H, que gera um Semi-Grupo fortemente contínuo $\{T(t): t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos sobre H.

Estudamos aqui o espectro do operador A e obtemos uma expressão para o operador resolvente $R(\lambda : A)$ do operador A, entretando o objetivo principal é obter estimativas exponenciais para o Semi-Grupo $T(t)$.

Através da divisão do espectro do operador A por retas verticais no plano complexo, conseguimos decompor o espaço de Hilbert H em soma direta de sub-espaços X e Y, invariantes por A, com Y de dimensão finita. A estimativa exponencial para o Semi-Grupo restrito a X segue via Transformada Inversa de Laplace, com o operador resolvente $R(\lambda : A)$ expandido de maneira conveniente. O resultado principal na obtenção dessa expansão, aparece no Teorema 4.1. Anteriormente Pazy [16] encontrou uma condição necessária e suficiente, (de difícil aplicação) para um Semi-Grupo $T(t)$ satisfazer a estimativa exponencial $\|T(t)\| \leq Me^{-\mu t}$, onde $M \geq 1$ e $\mu > 0$, num espaço de Hilbert, isto foi obtido através de funções de Lyapunov.

O Teorema de Bifurcação de Hopf, garante unicidade e existência de bifurcação de soluções periódicas de uma equação de evolução. Neste trabalho nós provamos uma versão deste teorema, num espaço de dimensão infinita para equações da forma

$$(2) \qquad \frac{dv}{ds} = A(r)v(s) + f(r,v(s)) \qquad (s > 0)$$

onde $A(r)$, para $|r| < \eta$, $\eta > 0$, é um operador linear fechado, definido num sub-espaço vetorial $\mathcal{D}$ (independente de r), $A(r)$ é o gerador infinitesimal de um Semi-Grupo, fortemente contínuo, $\{T(r,t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares contínuos, não necessariamente analítico. Colocamos hipóteses de decomposição do espaço em soma direta de sub-espaços X_r e Y_r invariantes em relação a $A(r)$, com $\dim Y_r = 2$ e $\|T(r,t)\| \leq M_1 e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, em X_r e ainda hipóteses de regularidade de função f.

O problema de bifurcação de soluções periódicas, (existência, unicidade, estabilidade de soluções, etc.) tem atraido a atenção de muitos autores, desde 1942 com o trabalho pioneiro de Hopf. Desde então, generalizações e problemas relacionados tem sido desenvolvidos, e é difícil comparar tais trabalhos, devido às diferentes técnicas e às diferentes hipóteses utilizadas.

A motivação e o procedimento empregados aqui, aparecem nos trabalhos de Ribeiro [19], Oliveira [15] e Lima [12]. Consiste na introdução de um novo parâmetro na equação, relativo ao período, e utilizando as hipíteses de decomposição do espaço, de dicotomia exponencial para o Semi-Grupo, e o Teorema das Funções Implícitas obter soluções "mild", dependendo de parâmetros, mas com período conhecido. Trabalhamos portanto diretamente na classe das funções periódicas. A semelhança entre o nosso trabalho e os trabalhos citados acima é o desconhecimento a priori da diferenciabilidade dessas soluções "mild", e isto é o ponto crucial na obtenção da bifurcação. A dificuldade adicional encontrada, com relação a esses trabalhos, é devido à perturbação na parte ilimitada, pelo parâmetro r. Esta dificuldade é estudada no parágrafo 1 do Capítulo

II, onde obtemos resultados sobre a diferenciabilidade do Semi-Grupo $T(r,t)u$, em relação a r, para $u \in \mathcal{D}$, e sobre a diferenciabilidade das soluções da equação (2), com condições iniciais diferenciavelmente perturbadas. Tais resultados são obtidos utilizando-se o Teorema de diferenciabilidade de Ponto Fixo dependente de parâmetro. A partir dessas técnicas demonstra-se também o Teorema de Bifurcação de Hopf no parágrafo 2.

CAPÍTULO 1

SISTEMAS HIPERBÓLICOS

1. INTRODUÇÃO

Consideremos um sistema hiperbólico na sua forma canônica

$$(1.1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + K\frac{\partial u}{\partial x} + Cu = 0$$

para $0 \leq x \leq \ell$ e $t \geq 0$, onde K é uma matriz diagonal

$$K = K(x) = \operatorname{diag}(k_i(x)); \quad i = 1,\dots,n$$

com $k_i > 0$ para $i = 1,\dots N$, $k_i < 0$ para $i = N+1,\dots,n$ e

$$C = C(x) = (c_{ij}(x)); \quad i,j = 1,\dots,n$$

e onde k_i e c_{ij} são funções de x suficientemente suaves (de classe C^2 pelo menos).

Colocaremos

$$u = \binom{v}{w}$$

com $v \in \mathbb{R}^N$ e $w \in \mathbb{R}^{n-N}$ e tomaremos o sistema hiperbólico acima com as seguintes condições de fronteira:

$$v(0) = Ew(0)$$

(C.F.)

$$w(\ell) = Dv(\ell)$$

onde E e D são matrizes constantes de tamanhos $N \times (n - N)$ e $(n - N) \times N$ respectivamente.

2. O ESPECTRO E O OPERADOR RESOLVENTE PARA O OPERADOR A, ORIGINÁRIO DO SISTEMA HIPERBÓLICO

Consideremos o Espaço de Hilbert

$$H = (L^2\,[0,\ell])^N \times (L^2\,[0,\ell])^{n-N}$$

com o produto inteiro usual dado por:

$$\langle f,g\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell} f_i\, g_i$$

se $f = (f_i)$ e $g = (g_i)$ pertencem a H e definimos o operador A

$$A : \mathcal{D}(A) C H \to H$$

por

$$A\binom{\varphi}{\psi} = -K\binom{\varphi'}{\psi'} - C\binom{\varphi}{\psi}$$

onde

$$\mathcal{D}(A) = \{(\varphi,\psi) \in H \,/\, (\varphi,\psi) \in (AC\,[0,\ell\,])^n,\ (\varphi',\psi') \in H \quad \text{e}$$

$$\varphi(0) = E\psi(0),\quad \psi(\ell) = D\varphi(\ell)\}.$$

Temos que A é um operador linear fechado e $\mathcal{D}(A)$ é um subespaço vetorial de H, denso em H.

Para determinar o conjunto resolvente $\rho(A)$ e o operador resolvente $R(\lambda:A)$ do operador A, dado $(f,g) \in H$, é preciso determinar os valores complexos de λ para os quais

(1.2) $$(\lambda - A)\binom{\varphi}{\psi} = \binom{f}{g}$$

admite solução (φ,ψ) pertencente a $\mathcal{D}(A)$ e dependendo continuamente de (f,g). Neste caso podemos escrever

$$\lambda\binom{\varphi}{\psi} + K\binom{\varphi'}{\psi'} + C\binom{\varphi}{\psi} = \binom{f}{g}$$

$$\binom{\varphi'}{\psi'} = [-\lambda K^{-1} - K^{-1}C]\binom{\varphi}{\psi} + K^{-1}\binom{f}{g}$$

e colocando $K_1 = -K^{-1}$, $C_1 = -K^{-1}C$ e $\binom{f_1}{g_1} = K^{-1}\binom{f}{g}$ obtemos

(1.3) $$\binom{\varphi'}{\psi'} = (C_1 + \lambda K_1)\binom{\varphi}{\psi} + \binom{f_1}{g_1}$$

se

$$X(x,y,\lambda)= \begin{pmatrix} X^{11}(x,y,\lambda)_{N\times N} & X^{12}(x,y,\lambda)_{N\times(n-N)} \\ X^{21}(x,y,\lambda)_{(n-N)\times N} & X^{22}(x,y,\lambda)_{(n-N)\times(n-N)} \end{pmatrix}$$

é a matriz principal do sistema

$$(1.4) \qquad \binom{\varphi'}{\psi'} = (C_1 + \lambda K_1)\binom{\varphi}{\psi}$$

temos que $X(y,y,\lambda) = I$, que as soluções desse sistema são funções inteiras de λ e que as soluções de (1.3) são dadas, usando a fórmula de variação das constantes, por

$$(1.5) \qquad \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} = X(x,0,\lambda) \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \psi(0) \end{pmatrix} + \int_0^x X(x,y,\lambda) \begin{pmatrix} f_1(y) \\ g_1(y) \end{pmatrix} dy.$$

Colocando $\varphi(0) = E\psi(0)$, temos, para $x = \ell$, que

$$\varphi(\ell) = X^{11}(\ell,0,\lambda)E\psi(0) + X^{12}(\ell,0,\lambda)\,\psi(0) +$$

$$+ \int_0^\ell (X^{11}(\ell,y,\lambda)f_1(y) + X^{12}(\ell,y,\lambda)g_1(y))dy$$

$$\psi(\ell) = X^{21}(\ell,0,\lambda)E\psi(0) + X^{22}(\ell,0,\lambda)\,\psi(0) +$$

$$+ \int_0^\ell (X^{21}(\ell,y,\lambda)f_1(y) + X^{22}(\ell,y,\lambda)g_1(y))dy$$

e para termos $\psi(\ell) = D\varphi(\ell)$ é preciso que

$$(1.6)\quad [X^{21}(\ell,0,\lambda)E + X^{22}(\ell,0,\lambda) - DX^{11}(\ell,0,\lambda)E - DX^{12}(\ell,0,\lambda)]\ \psi(0) =$$

$$= - \int_0^\ell (X^{21}(\ell,y,\lambda)f_1(y) + X^{22}(\ell,y,\lambda)g_1(y))dy +$$

$$+ D\int_0^\ell (X^{11}(\ell,y,\lambda)f_1(y) + X^{12}(\ell,y,\lambda)g_1(y))dy.$$

Portanto colocando

$$H(\lambda) = X^{21}(\ell,0,\lambda)E + X^{22}(\ell,0,\lambda) - DX^{11}(\ell,0,\lambda)E - DX^{12}(\ell,0,\lambda)$$

$$h(\lambda) = \det H(\lambda)$$

temos que, $h(\lambda)$ é uma função inteira de λ, e:

1. Os zeros de $h(\lambda)$ pertencem ao espectro pontual $\sigma_p(A)$, do operador A, pois

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} = X(x,0,\lambda)\binom{Eb}{b}$$

onde, b é uma solução não nula do sistema $H(\lambda)b = 0$, satisfaz

$$(\lambda - A)\binom{\varphi}{\psi} = 0$$

2. Os valores complexos de λ tais que $h(\lambda) \neq 0$ pertencem

ao conjunto resolvente $\rho(A)$, do operador A, pois (1.6) fornece

(1.7) $$\psi(0) = H(\lambda)^{-1}\Big[-\int_0^{\ell}(X^{21}(\ell,y,\lambda)f_1(y) + X^{22}(\ell,y,\lambda)g_1(y))dy + D\int_0^{\ell}(X^{11}(\ell,y,\lambda)f_1(y) + X^{12}(\ell,y,\lambda)g_1(y))dy\Big]$$

portanto, colocando $\varphi(0) = E\psi(0)$ em (1.5) obtemos $(\varphi,\psi) \in \mathcal{D}(A)$ e (φ,ψ) dependem linearmente e continuamente de (f,g).

Portanto, temos que:

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\lambda \,/\, h(\lambda) = 0\}$$

e se $\lambda \notin \sigma(A)$, então

$$R(\lambda : A)\binom{f}{g}(x) = X(x,0,\lambda)\begin{pmatrix} E\psi(0) \\ \psi(0)\end{pmatrix} + \int_0^x X(x,y,\lambda)\begin{pmatrix} f_1(y) \\ g_1(y)\end{pmatrix} dy$$

onde $\psi(0)$ é dado por (1.7) e $\binom{f_1}{g_1} = K^{-1}\binom{f}{g}$.

3. SEMI-GRUPO, FORTEMENTE CONTÍNUO, DE OPERADORES LINEARES CONTÍNUOS, DEFINIDOS SOBRE O ESPAÇO DE HILBERT H E GERADO PELO OPERADOR A

TEOREMA 3.1: *O operador* A *definido sobre* $\mathcal{D}(A)$ *com valores em* H *é o gerador infinitesimal de um Semi-Grupo, fortemente contínuo,*

$$\{T(t) : t \geq 0\}$$

de operadores lineares contínuos definidos sobre H, *satisfazendo*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}; \quad t \geq 0$$

para $M > 0$ *e* $w \in \mathbb{R}$ *e, além disso, para* $u \in \mathcal{D}(A^2)$

$$T(t)u = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A) u \, d\lambda$$

onde $b > \max\{0, w\}$.

DEMONSTRAÇÃO: Temos que, para $(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}(A)$,

$$A\binom{\varphi}{\psi} = - K\binom{\varphi'}{\psi'} - C\binom{\varphi}{\psi}$$

onde $K = K(x) = \mathrm{diag}(k_i(x))$ e $C = C(x) = (C_{ij}(x))$. Como o operador

$$f \mapsto C\,f; \qquad f = (f_1\,, \dots, f_n) \in H$$

é um operador linear limitado definido sobre H pois

$$\| Cf \|_H = \| \left(\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, f_j \right) \|_H \qquad (i = 1, \dots, n)$$

logo, pela desigualdade de Schwarz, temos

$$\| Cf \|_H = \left[\sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{n} C_{ij}(x)\, f_j(x) \right)^2 dx \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^2(x) \cdot \sum_{j=1}^{n} f_j^2(x) \right) dx \right]^{1/2}$$

portanto, tomando

$$M_1 = \max \left\{ \sup_{0 \leq x \leq \ell} \left(\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^2(x) \right) : i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

temos que

$$\| Cf \|_H \leq \left[n M_1 \cdot \int_0^{\ell} \sum_{j=1}^{n} f_j^2(x)\, dx \right]^{1/2} = \sqrt{n M_1}\; \| f \|_H$$

isto é

$$\| Cf \|_H \leq M \| f \|_H \qquad \text{com} \qquad M = \sqrt{n M_1}$$

portanto, basta mostrar que o operador linear

$$\tilde{A} : \mathcal{D}(A) \to H$$

dado por

$$\tilde{A}\binom{\varphi}{\psi} = - K\binom{\varphi'}{\psi'}$$

gera Semi-Grupo fortemente contínuo, e para isto, (aplicando o Teorema de Lumer - Phillips em $\tilde{A} - w_1 I$) temos de verificar que

$$p(\tilde{A}\phi,\phi) \leq w_1 \|\phi\|_p^2 , \qquad \phi \in \mathcal{D}(A)$$

onde p é o produto inteiro sobre H, equivalente ao produto original de H, dado por

$$p(f,g) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell} \mu_i(x) f_i(x) g_i(x) dx; \; f = (f_i) \text{ e } g = (g_i) \text{ em } H$$

onde os pesos $\mu_i(x)$ são funções positivas de classe $C^1[0,\ell]$ que serão escolhidas convenientemente de modo a obter a seguinte condição de dissipatividade:

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i(0) k_i(0) \phi_i^2(0) \leq 0$

(1.8)

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\ell) k_i(\ell) \phi_i^2(\ell) \geq 0$ com $\phi = (\phi_i) \in \mathcal{D}(A)$

e $\| \ \|_p$ é a norma em H, proveniente do produto interno p. Justificaremos a existência dos pesos $\mu_i(x)$, $i = 1,\dots,n$, observando que, se $\phi = (\phi_i) \in \mathcal{D}(A)$, temos

$$\phi_i(0) = \sum_{j=N+1}^{n} e_{ij}\phi_j(0) \quad \text{para} \quad i = 1,\dots,N$$

$$\phi_i(\ell) = \sum_{j=1}^{N} d_{ij}\phi_j(\ell) \quad \text{para} \quad i = N+1,\dots,n$$

se $E = (e_{ij})_{N\times(n-N)}$ e $D = (d_{ij})_{(n-N)\times N}$

portanto, substituindo em i) de (1.8) e usando a desigualdade de Schwarz podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(0)k_i(0)\phi_i^2(0) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i(0)k_i(0)\Big(\sum_{j=N+1}^{n} e_{ij}\phi_j(0)\Big)^2 +$$

$$+ \sum_{j=N+1}^{n} \mu_j(0)k_j(0)\phi_j^2(0) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{N} \mu_i(0)k_i(0)\Big(\sum_{j=N+1}^{n} e_{ij}^2\Big)\Big(\sum_{j=N+1}^{n} \phi_j^2(0)\Big) + \sum_{j=N+1}^{n} \mu_j(0)k_j(0)\phi_j^2(0)$$

pois k_i para $i = 1,\dots,N$ e μ_i, $i = 1,\dots,n$, são funções positivas, logo temos

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(0)k_i(0)\phi_i^2(0) \le \sum_{j=N+1}^{n} \Big[\sum_{i=1}^{N} \mu_i(0)k_i(0)\big(\Sigma\, e_{ij}^2\big) + \mu_j(0)k_j(0)\Big]\phi_j^2(0)$$

que para obter a desigualdade i) de (1.8) basta tomar funções $\mu_i(x)$, $i=1,\ldots,N$, com $\mu_i(0)$ suficientemente pequenos, pois $k_j(0) < 0$ para $j = N+1,\ldots,n$. De modo análogo, para obter o item ii) de (1.8), devemos escolher funções $\mu_i(x)$, $i = N+1,\ldots,n$ com $\mu_i(\ell)$ suficientemente pequenos.

Nessas condições temos, para $\phi \in \mathcal{D}(A)$, que

$$p(\tilde{A}\phi,\phi) = \sum_{i=1}^{n} - \int_0^\ell \mu_i(x)k_i(x)\phi_i'(x)\phi_i(x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\ell \mu_i(x)k_i(x)\frac{d}{dx}\left(\phi_i^2(x)\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_i(x)k_i(x)\phi_i^2(x)\right]_0^\ell - \int_0^\ell \frac{d}{dx}\left(\mu_i(x)k_i(x)\right)\phi_i^2(x)dx$$

portanto, usando i) e ii) de (1.8), podemos escrever que

$$p(\tilde{A}\phi,\phi) \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\ell \frac{d}{dx}\left(\mu_i(x)k_i(x)\right)\phi_i^2(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\ell \mu_i(x)\left[\frac{\mu_i'(x)k_i(x)}{\mu_i(x)} + k_i'(x)\right]\phi_i^2(x)dx$$

logo, tomando

$$w_1 = \max\left\{\sup_{0\le x\le \ell}\frac{1}{2}\left[\frac{\mu_i'(x)k_i(x)}{\mu_i(x)} + k_i'(x)\right] : i=1,\ldots,n\right\}$$

obtemos

$$p(\tilde{A}\phi,\phi) \leq w_1 \|\phi\|_p^2 \quad \text{se} \quad \phi \in \mathcal{D}(A).$$

Como $\mathcal{D}(A)$ é denso em H e o espectro de $\tilde{A}$ são zeros de uma função analítica não nula, portanto pontos isolados, podemos afirmar que operador $A : \mathcal{D}(A) \to H$ gera um Semi-Grupo, fortemente contínuo, de operadores lineares contínuos, definidos sobre H, $T(t)$, $t \geq 0$, satisfazendo

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \quad M \geq 1, \quad w \in \mathbb{R}$$

e pelo Corolário 7.5, pg. 31 de (Pazy, [17]) temos, para $u \in \mathcal{D}(A^2)$, que

$$T(t)u = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)u\,d\lambda$$

onde $b > \max\{0,w\}$ completando a prova do teorema. □

4. EXPANSÃO DAS MATRIZES

O teorema seguinte nos dará uma expansão da matriz principal de soluções do sistema (1.4) para $\lambda \neq 0$, que exercerá um papel fundamental nos resultados que se seguirão neste capítulo, que são: Uma análise mais detalhada do espectro do operador A e a obtenção de uma dicotomia exponencial para o Semi-Grupo gerado por A, à partir da divisão do espectro de A no plano complexo, por uma reta vertical. Para isto colocaremos

$$C_1 = C_1(x) = -K(x)^{-1}C(x) = (a_{ij}(x)); \quad i,j = 1,\dots,n$$

e

$$K_1 = K_1(x) = -K(x)^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_i(x))$$

onde

$$\lambda_i(x) = \frac{-1}{k_i(x)}$$

portanto $\lambda_i < 0$ para $i = 1,\dots,N$ e $\lambda_i > 0$ para $i = N+1,\dots,n$

TEOREMA 4.1: *A matriz principal de soluções* $X(x,\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $X(0,\lambda) = I$, *do sistema*

$$\binom{\varphi'}{\psi'} = (C_1 + \lambda K_1)\binom{\varphi}{\psi}$$

é dada, para $\lambda \neq 0$, *por*

$$X(x,\lambda) = X_o(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda} X_1(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2(x,\lambda)$$

onde:

i) $\quad X_o(x,\lambda) = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda \int_o^x \lambda_i(s)ds + \int_o^x a_{ii}(s)ds} \right)$

ii) $\quad X_1(x,\lambda) = (d_{ij}) \quad$ *onde*

$$d_{ij} = \frac{e^{\lambda \int_o^x \lambda_j(s)ds} \, a_{ij}(x) e^{\int_o^x a_{jj}(s)ds}}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)} -$$

$$- \frac{e^{\lambda \int_o^x \lambda_i(s)ds} \, a_{ij}(0) e^{\int_o^x a_{ii}(s)ds}}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)}$$

para $i \neq j$, *e*

$$d_{ii} = e^{\lambda \int_o^x \lambda_i(s)ds + \int_o^x a_{ii}(s)ds} \int_o^x \left(\sum_{k \neq i} \frac{a_{ik}(y) a_{ki}(y)}{\lambda_i(y) - \lambda_k(y)} \right) dy$$

iii) *Para* $0 \leq x \leq \ell$ *e* $|\lambda| \leq \sigma$ $(\sigma > 0)$ *existe uma constante* $\mathbb{K} = \mathbb{K}(\ell,\sigma) > 0$ *tal que, se*

$$X_2(x,\lambda) = (e_{ij}(x,\lambda))$$

então

$$|X_2(x,\lambda)| \leq \mathbb{K}$$

para $0 \leq x \leq \ell$, $|\mathrm{Re}\,\lambda| \leq \sigma$, *onde*

$$|X_2(x,\lambda)| = \max |e_{ij}(x,\lambda)|; \quad i,j = 1,2,\ldots,n.$$

DEMONSTRAÇÃO: Mostraremos primeiramente que, se f é de classe C^2, então para $i \neq j$ e λ complexo não nulo, temos:

$$(1.9) \qquad \int_0^x e^{\lambda \int_y^x \lambda_i(s)ds + \lambda \int_0^y \lambda_j(s)ds} f(y)dy =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda \int_0^x \lambda_j(s)ds} \frac{f(x)}{\lambda_j(x)-\lambda_i(x)} - e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s)ds} \frac{f(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2}\,\mathbb{K}_{ij}(f,x,\lambda)$$

com

$$(1.10) \quad |\mathbb{K}_{ij}(f,x,\lambda)| \leq e^{\sigma M x}\mathbb{K}_1 \quad \text{se} \quad 0 \leq x \leq \ell \quad \text{e} \quad |\mathrm{Re}\,\lambda| \leq \sigma \quad \sigma > 0,$$

onde $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_1(f,\ell,\sigma) > 0$, $|\lambda_i(x)| \le M$ para $0 \le x \le \ell$ e $i = 1,\dots,n$. De fato, como

$$\int_0^x e^{\lambda \int_y^x \lambda_i(s)ds + \lambda \int_0^y \lambda_j(s)ds} f(y)dy =$$

$$= e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s)ds} \int_0^x e^{\lambda \int_0^y (\lambda_j(s) - \lambda_i(s))ds} f(y)dy =$$

$$= e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s)ds} \int_0^x \frac{d}{dy}\left(e^{\lambda \int_0^y (\lambda_j(s) - \lambda_i(s))ds}\right) \frac{f(y)}{\lambda(\lambda_j(y)- \lambda_i(y)} dy$$

temos integrando por partes que

(1.11)
$$\int_0^x e^{\lambda \int_y^x \lambda_i(s)ds + \lambda \int_0^y \lambda_j(s)ds} f(y)dy =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda \int_0^x \lambda_j(s)ds} \frac{f(x)}{\lambda_j(x)-\lambda_i(x)} - e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s)ds} \frac{f(0)}{\lambda_j(0)-\lambda_i(0)}\right] -$$

$$- \frac{1}{\lambda} e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s)ds} \int_0^x e^{\lambda \int_0^y (\lambda_j(s) - \lambda_i(s))ds} h(y)dy$$

onde

$$h(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{f(y)}{\lambda_j(y) - \lambda_i(y)}\right) .$$

Integrando novamente por partes o último termo, obtemos que

$$-\frac{1}{\lambda} e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s)ds} \int_0^x e^{\lambda \int_0^y (\lambda_j(s) - \lambda_i(s))ds} h(y)dy =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\left[- e^{\lambda \int_0^x \lambda_j(s)ds} \frac{h(x)}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)} + e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s)ds} \frac{h(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} + \right.$$

$$\left. + \int_0^x e^{\lambda \int_0^y \lambda_j(s)ds + \lambda \int_y^x \lambda_i(s)ds} g(y)dy \right] .$$

onde

$$g(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{h(y)}{\lambda_j(y) - \lambda_i(y)}\right) ,$$

portanto chamando o termo entre colchetes acima de $\mathbb{K}_{ij}(f,x,\lambda)$ justificamos a igualdade (1.9), e para $0 \leq x \leq \ell$ e $|\mathrm{Re}\,\lambda| \leq \sigma$ temos que

$$\left|\mathbb{K}_{ij}(f,x,\lambda)\right| \leq e^{\sigma M x}\left[2 \sup_{0\leq x\leq \ell}\left|\frac{h(x)}{\lambda_j(x)-\lambda_i(x)}\right| + e^{\sigma M \ell} \sup_{0\leq x\leq \ell} |g(x)|\,\ell \right]$$

portanto para obter (1.10) basta tomar

$$\mathbb{K}_1 = \max_{i \neq j} \left(2 \sup_{0 \le x \le \ell} \left| \frac{h(x)}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)} \right| \right) + e^{\sigma M \ell} \sup_{0 \le x < \ell} |g(x)| \cdot \ell \, .$$

Começaremos a demonstração do teorema tomando

$$X(x,\lambda) = X_o(x,\lambda) + Y_1(x,\lambda),$$

isto é,

$$Y_1(x,\lambda) = X(x,\lambda) - X_o(x,\lambda).$$

Temos que

$$X' = (C_1 + \lambda K_1)X,$$

portanto multiplicando esta igualdade por $e^{-\lambda \int_o^x K_1(s)ds}$ chegamos a

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\lambda \int_o^x K_1(s)ds} X \right) = e^{-\lambda \int_o^x K_1(s)ds} C_1(y)X(y,\lambda)$$

logo

$$e^{-\lambda \int_o^x K_1(s)ds} X(x,\lambda) = I + \int_o^x e^{-\lambda \int_o^y K_1(s)ds} C_1(y)X(y,\lambda)dy$$

ou melhor

$$X(x,\lambda) = e^{\lambda \int_o^x K_1(s)ds} + \int_o^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s)ds} C_1(y)X(y,\lambda)dy$$

segue daí, que

$$(1.12)\qquad Y_1(x,\lambda) = e^{\lambda\int_0^x K_1(s)\,ds} - X_o(x,\lambda) +$$

$$+ \int_0^x e^{\lambda\int_y^x K_1(s)\,ds} C_1(y)\left(Y_1(x,\lambda) + X_o(x,\lambda)\right) dy.$$

Analisaremos primeiramente a matriz

$$(1.13)\qquad \int_0^x e^{\lambda\int_y^x K_1(s)\,ds} C_1(y)X_o(x,\lambda)\,dy$$

que possui na posição ij o termo

$$\int_0^x e^{\lambda\int_y^x \lambda_i(s)\,ds} a_{ij}(y)\, e^{\lambda\int_0^y \lambda_j(s)\,ds + \int_0^y a_{jj}(s)\,ds}\, dy =$$

$$= \int_0^x e^{\lambda\int_y^x \lambda_i(s)\,ds + \lambda\int_0^y \lambda_j(s)\,ds} a_{ij}(y)\, e^{\int_0^y a_{jj}(s)\,ds}$$

para $i = j$ temos

$$\int_0^x e^{\lambda\int_0^x \lambda_i(s)\,ds} a_{ii}(y) e^{\int_0^y a_{ii}(s)\,ds} = e^{\lambda\int_0^x \lambda_i(s)ds}\int_0^x \frac{d}{dy}\left(e^{\int_0^y a_{ii}(s)ds}\right) dy =$$

$$= e^{\lambda\int_0^x \lambda_i(s)\,ds + \int_0^x a_{ii}(s)\,ds} - e^{\lambda\int_0^x \lambda_i(s)\,ds}$$

isto é, a diagonal da matriz (1.13) é igual a diagonal de

$$X_o(x,\lambda) - e^{\lambda \int_o^x K_1(s)ds} ,$$

para $i \neq j$, usamos a igualdade dada em (1.9) com

$$f(y) = a_{ij}(y)\, e^{\int_o^y a_{jj}(s)ds}$$

de modo que a igualdade (1.12) fica

$$Y_1(x,\lambda) =$$

$$\left(\frac{1}{\lambda} \left[e^{\lambda \int_o^x \lambda_j(s)ds} \frac{a_{ij}(x)\, e^{\int_o^x a_{jj}(s)ds}}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)} - e^{\lambda \int_o^x \lambda_i(s)ds} \frac{a_{ij}(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{K}_{ij} \left(a_{ij}(\cdot)\, e^{\int_o^{\cdot} a_{jj}(s)ds}, x, \lambda\right) \right)_{i\neq j} +$$

$$+ \int_o^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s)ds} C_1(y) Y_1(y,\lambda)dy$$

onde a primeira matriz dessa soma possui a diagonal nula.

Colocando $Y_1 = \dfrac{Z_1}{\lambda}$ obtemos

$$X(x,\lambda) = X_o(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda} Z_1(x,\lambda)$$

onde Z_1 deve satisfazer

$$Z_1(x,\lambda) = \left(e^{\lambda\int_o^x \lambda_j(s)ds} \frac{a_{ij}(x)\, e^{\int_o^x a_{jj}(s)ds}}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)} - e^{\lambda\int_o^x \lambda_i(s)ds} \frac{a_{ij}(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} + \right.$$

$$(1.14) \qquad \left. + \frac{1}{\lambda} \mathbb{K}_{ij}\left(a_{ij}(\cdot)\, e^{\int_o^{\cdot} a_{jj}(s)ds}, x, \lambda\right) \right)_{i\neq j} +$$

$$+ \int_o^x e^{\lambda\int_y^x K_1(s)ds} C_1(y) Z_1(y,\lambda)dy.$$

Procuraremos então determinar numa matriz $X_1(x,\lambda)$ tal que, para $\lambda \neq 0$, deve satisfazer

$$X_1(x,\lambda) = \left(e^{\lambda\int_o^x \lambda_j(s)ds} \frac{a_{ij}(x)\, e^{\int_o^x a_{jj}(s)ds}}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)} - e^{\lambda\int_o^x \lambda_i(s)ds} \frac{a_{ij}(0)}{\lambda_j(0)-\lambda_i(0)} \right)_{i\neq j} +$$

(1.15)

$$+ \int_o^x e^{\lambda\int_y^x K_1(s)ds} C_1(y) X_1(y,\lambda)dy + \frac{1}{\lambda} (\gamma_{ij}(x,\lambda))_{n\times n}$$

onde

$$(1.16) \quad |\gamma_{ij}(x,\lambda)| \leq e^{\sigma M x}\mathbb{K}_2 \text{ se } 0 \leq x \leq \ell \text{ e } |\mathrm{Re}\,\lambda| < \sigma, \quad \sigma > 0$$

com

$$\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_2(\ell,\sigma) > 0.$$

Procuraremos $X_1(x,\lambda)$ na forma de uma soma

$$X_1(x,\lambda) = X_1^1(x,\lambda) + X_1^2(x,\lambda)$$

onde

$$X_1^1(x,\lambda) = \left(e^{\lambda \int_0^x \lambda_j(s)ds} \alpha_{ij}(x) \right)_{n\times n}$$

e

$$X_1^2(x,\lambda) = \left(e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s)ds} \beta_{ij}(x) \right)_{n\times n}$$

temos então que

$$\int_0^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s)ds} C_1(y)X_1(y,\lambda)dy =$$

$$= \int_0^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s)ds} C_1(y)X_1^1(y,\lambda)dy +$$

$$+ \int_0^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s)ds} C_1(y)X_1^2(y,\lambda)dy$$

e o problema pode ser dividido em duas partes:

$1^a_.$ PARTE: A matriz

$$\int_0^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s)ds} C_1(y) X_1^1(y,\lambda)dy$$

possui na posição ij o termo

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^x e^{\lambda \int_y^x \lambda_i(s)ds} a_{ik}(y)\, e^{\lambda \int_0^y \lambda_j(s)ds} \alpha_{kj}(y)dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^x e^{\lambda \int_y^x \lambda_i(s)ds + \lambda \int_0^y \lambda_j(s)ds} a_{ik}(y)\alpha_{kj}(y)dy$$

que para $i \neq j$, através da igualdade (1.11) com

$$f(y) = a_{ik}(y)\alpha_{kj}(y),$$

pode ser transformado numa expressão em $\frac{1}{\lambda}$ do tipo $\frac{1}{\lambda}\,\gamma_{ij}(x,\lambda)$ satisfazendo (1.16), qualquer que seja $\alpha_{kj}(y)$ continuamente diferenciavel considerada, logo podemos tomar

$$\alpha_{ij}(x) = \frac{a_{ij}(x)\, e^{\int_0^x a_{jj}(s)ds}}{\lambda_j(x) - \lambda_i(x)}, \quad i \neq j \tag{1.17}$$

que os termos $i \neq j$ de

$$\int_o^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s)ds} C_1(y) X_1^1(y,\lambda) dy$$

serão eliminados pelos termos da matriz $\frac{1}{\lambda}$ $(\gamma_{ij}(x,\lambda))$ e estaremos de acordo com a igualdade (1.15). Na posição ii temos o termo

$$\sum_{k=1}^{n} \int_o^x e^{\lambda \int_o^x \lambda_i(s)ds} a_{ik}(y)\alpha_{ki}(y)dy$$

portanto para $X_1^1(x,\lambda)$ satisfazer (1.15) procuraremos $\alpha_{ii}(x)$ que satisfaça

$$e^{\lambda \int_o^x \lambda_i(s)ds} \alpha_{ii}(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda \int_o^x \lambda_i(s)ds} \int_o^x a_{ik}(y)\alpha_{ki}(y)dy$$

isto é

$$\alpha_{ii}(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_o^x a_{ik}(y)\alpha_{ki}(y)dy =$$

$$= \int_o^x a_{ii}(y)\alpha_{ii}(y)dy + \sum_{k\neq i} \int_o^x a_{ik}(y)\alpha_{ki}(y)dy$$

logo, resolvendo achamos

$$\alpha_{ii}(x) = \left[\int_o^x \sum_{k\neq 1} a_{ik}(y)\alpha_{ki}(y)\, e^{-\int_o^y a_{ii}(s)ds} \right] e^{\int_o^x a_{ii}(s)ds}$$

como $\alpha_{ki}(y)$, para $k \neq i$, é dada por (1.17) obtemos

$$(1.18) \qquad \alpha_{ii}(x) = e^{\int_o^x a_{ii}(s)ds} \int_o^x \sum_{k \neq i} \frac{a_{ik}(y)a_{ki}(y)}{\lambda_i(y) - \lambda_k(y)} dy$$

2ª PARTE: A matriz

$$\int_o^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s)ds} C_1(y)X_1^2(y)dy$$

possui na posição ij o termo

$$\sum_{k=1}^{n} \int_o^x e^{\lambda \int_y^x \lambda_i(s)ds} a_{ik}(y)\, e^{\lambda \int_o^y \lambda_k(s)ds} \beta_{kj}(y)dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_o^x e^{\lambda \int_y^x \lambda_i(s)ds + \lambda \int_o^y \lambda_k(s)ds} a_{ik}(y)\beta_{kj}(y)dy$$

aqui, como na 1ª parte, podemos eliminar os termos para os quais $k \neq i$, usando a igualdade (1.11), portanto temos que considerar na posição ij somente a expressão

$$\int_o^x e^{\lambda \int_o^x \lambda_i(s)ds} a_{ii}(y)\beta_{ij}(y)dy \qquad (k = i)$$

logo para $X_1^2(x,\lambda)$ satisfazer (1.15) procuraremos $\beta_{ij}(x)$ que satisfaça, para $i \neq j$

$$e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s)ds} \beta_{ij}(x) = - e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s)ds} \frac{a_{ij}(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} + $$

$$+ \int_0^x e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s)ds} a_{ii}(y)\beta_{ij}(y)dy$$

isto é,

$$\beta_{ij}(x) = \int_0^x a_{ii}(y)\beta_{ij}(y)dy - \frac{a_{ij}(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} ; \qquad (i \neq j)$$

portanto, resolvendo achamos

$$(1.19) \qquad \beta_{ij}(x) = \frac{- a_{ij}(0)}{\lambda_j(0) - \lambda_i(0)} e^{\int_0^x a_{ii}(s)ds} ; \qquad (i \neq j)$$

e para $i = j$

$$e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s)ds} \beta_{ii}(x) = \int_0^x e^{\lambda \int_0^x \lambda_i(s)ds} a_{ii}(y)\beta_{ii}(y)dy$$

logo

$$(1.20) \qquad \beta_{ii}(x) = 0.$$

Determinamos dessa maneira, itens (1.17) a (1,20), a matriz $X_1(x,\lambda)$ satisfazendo o item ii) do teorema.

Temos que

$$X(x,\lambda) = X_o(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda} Z_1(x,\lambda)$$

onde $Z_1(x,\lambda)$ satisfaz (1.14), logo fazendo

$$Z_1(x,\lambda) = X_1(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda} X_2(x,\lambda)$$

obtemos

$$X(x,\lambda) = X_o(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda} X_1(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2(x,\lambda)$$

onde

$$X_2(x,\lambda) = \lambda(Z_1(x,\lambda) - X_1(x,\lambda)).$$

Por (1.14) e (1.15) obtemos que

$$Z_1(x,\lambda) - X_1(x,\lambda) = \int_o^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s)ds} C_1(y)\Big(Z_1(y,\lambda) - X_1(y,\lambda)\Big) dy$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \Big(\gamma_{ij}(x,\lambda)\Big)_{n \times n}$$

onde

$$|\gamma_{ij}(x,\lambda)| \leq e^{\sigma M x}\, \mathbb{K}_3 \quad \text{se} \quad |\mathrm{Re}\,\lambda| \leq \sigma, \qquad \sigma > 0$$

e $\mathbb{K}_3 > 0$, portanto

$$X_2(x,\lambda) = \int_0^x e^{\lambda \int_y^x K_1(s)ds}\, C_1(y) X_2(y,\lambda) dy + R(x,\lambda)$$

onde

$$|R(x,\lambda)| \leq e^{\sigma M x} \mathbb{K}_3 \quad \text{se} \quad |\mathrm{Re}\,\lambda| \leq \sigma$$

portanto para os valores complexos de λ com $|\mathrm{Re}\,\lambda| \leq \sigma$ temos

$$|X_2(x,\lambda)| \leq \int_0^x e^{\sigma M(x-y)}\, |C_1(y)|\, |X_2(y,\lambda)| dy + e^{\sigma M x} \mathbb{K}_3 =$$

$$= e^{\sigma M x} \left[\int_0^x |C_1(y)|\, e^{-\sigma M y}\, |X_2(y,\lambda)| dy + \mathbb{K}_3 \right]$$

logo

$$e^{-\sigma M x}\, |X_2(x,\lambda)| \leq \mathbb{K}_3 + \int_0^x |C_1(y)|\, e^{-\sigma M y}\, |X_2(y,\lambda)| dy$$

e aplicando a desigualdade de Gronwall obtemos:

$$e^{-\sigma M x}\, |X_2(x,\lambda)| \leq \mathbb{K}_3\, e^{\int_0^x |C_1(y)| dy}$$

portanto

$$|X_2(x,\lambda)| \le e^{\sigma M\ell}\, \mathbb{K}_3\, e^{\int_0^\ell |C_1(y)|dy} = \mathbb{K}$$

onde $\mathbb{K} = \mathbb{K}(\ell,\sigma) > 0$ satisfaz o item iii) do teorema. □

Como

$$X(x,\lambda) = X(x,0,\lambda) = \begin{pmatrix} X^{11}(x,\lambda)_{N\times N} & X^{12}(x,\lambda)_{N\times(n-N)} \\ X^{21}(x,\lambda)_{(n-N)\times N} & X^{22}(x,\lambda)_{(n-N)\times(N-N)} \end{pmatrix}.$$

podemos escrever, usando o teorema 4.1, que:

$$X^{11}(x,\lambda) = X_0^{11}(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda} X_1^{11}(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2^{11}(x,\lambda)$$

$$X^{12}(x,\lambda) = \qquad + \frac{1}{\lambda} X_1^{12}(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2^{12}(x,\lambda)$$

$$(1.21)\qquad X^{21}(x,\lambda) = \qquad + \frac{1}{\lambda} X_1^{21}(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2^{21}(x,\lambda)$$

$$X^{22}(x,\lambda) = X_0^{22}(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda} X_1^{22}(x,\lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2^{22}(x,\lambda)$$

onde $|X_2^{ij}(x,\lambda)|$ ē limitado para $0 \le x \le \ell$, $|\mathrm{Re}\,\lambda|$ limitado, i, j = i,2 e daī enunciar o seguinte corolārio.

COROLÁRIO 4.1: *A matriz principal de soluções* $X(x,y,\lambda)$ *do sistema (1.4),* $X(y,y,\lambda) = I$, *para* $\lambda \neq 0$, *é dada por*

$$X(x,y,\lambda) = X_o(x,y,\lambda) + \frac{1}{\lambda} X_1(x,y,\lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2(x,y,\lambda)$$

onde

$$X_o(x,y,\lambda) = X_o(x,\lambda) X_o(y,\lambda)^{-1}$$

$$X_1(x,y,\lambda) = [\, X_1(x,\lambda) - X_o(x,\lambda) X_o(y,\lambda)^{-1} X_1(y,\lambda) \,]\, X_o(y,\lambda)^{-1}$$

e $|X_2(x,y,\lambda)|$ *é limitado para* $0 \leq x,\ y \leq \ell$ *e* $|\mathrm{Re}\,\lambda|$ *limitado, e ainda mais, como*

$$X(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} X^{11}(x,y,\lambda)_{N \times N} & X^{12}(x,y,\lambda)_{N \times (n-N)} \\ & \\ X^{21}(x,y,\lambda)_{(n-N) \times N} & X^{22}(x,y,\lambda)_{(n-N) \times (n-N)} \end{pmatrix}$$

obtemos que

$$X^{11}(x,y,\lambda) = X_o^{11}(x,\lambda) X_o^{11}(y,\lambda)^{-1} + \frac{1}{\lambda} [\, X_1^{11}(x,\lambda) -$$

$$- X_o^{11}(x,\lambda) X_o^{11}(y,\lambda)^{-1} X_1^{11}(y,\lambda) \,]\, X_o^{11}(y,\lambda)^{-1} + \text{termo em } \lambda^{-2}$$

$$X^{12}(x,y,\lambda) = \qquad\qquad + \frac{1}{\lambda}\,[\,X_1^{12}(x,\lambda) -$$

$$- X_o^{11}(x,\lambda)X_o^{11}(y,\lambda)^{-1}X_1^{12}(y,\lambda)\,]\,X_o^{22}(y,\lambda)^{-1} + \text{ termo em } \lambda^{-2}$$

$$X^{21}(x,y,\lambda) = \qquad\qquad + \frac{1}{\lambda}\,[\,X_1^{21}(x,\lambda) -$$

$$- X_o^{22}(x,\lambda)X_o^{22}(y,\lambda)^{-1}X_1^{21}(y,\lambda)\,]\,X_o^{11}(y,\lambda)^{-1} + \text{ termo em } \lambda^{-2}$$

$$X^{22}(x,y,\lambda) = X_o^{22}(x,\lambda)X_o^{22}(y,\lambda)^{-1} + \frac{1}{\lambda}\,[\,X_1^{22}(x,\lambda) -$$

$$- X_o^{22}(x,\lambda)X_o^{22}(y,\lambda)^{-1}X_1^{22}(y,\lambda)\,]\,X_o^{22}(y,\lambda)^{-1} + \text{ termo em } \lambda^{-2}$$

com as matrizes nos termos em λ^{-2} *também limitadas para* $0 \leq x, y \leq \ell$ *e* $|\mathrm{Re}\,\lambda|$ *limitado.*

DEMONSTRAÇÃO: Temos, pelo teorema 4.1, que

$$X(y,\lambda) = X_o(y,\lambda) + \frac{1}{\lambda} X_1(y,\lambda) + \frac{1}{\lambda^2} X_2(y,\lambda)$$

com

$$X_o(y,\lambda) = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda \int_o^y \lambda_i(s)ds + \int_o^y a_{ii}(s)ds} \right)$$

portanto podemos escrever que

$$X(y,\lambda)^{-1} = \left[\left(I + \frac{1}{\lambda} X_1(y,\lambda)X_o(y,\lambda)^{-1} + \frac{1}{\lambda^2} X_2(y,\lambda)X_o(y,\lambda)^{-1}\right) X_o(y,\lambda)\right]^{-1} =$$

$$= X_o(y,\lambda)^{-1}\left(I + \frac{1}{\lambda} X_1(y,\lambda)X_o(y,\lambda)^{-1} + \frac{1}{\lambda^2} X_2(y,\lambda)X_o(y,\lambda)^{-1} \right)^{-1}$$

$$= X_o(y,\lambda)^{-1}\left(I - \frac{1}{\lambda} X_1(y,\lambda)X_o(y,\lambda)^{-1} + \frac{1}{\lambda^2} R(y,\lambda)\right)$$

pois, para $|\lambda|$ grande com $|\mathrm{Re}\,\lambda|$ limitado, a inversa

$$\left(I + \frac{1}{\lambda} X_1(y,\lambda)X_o(y,\lambda)^{-1} + \frac{1}{\lambda^2} X_2(y,\lambda)X_o(y,\lambda)^{-1} \right)^{-1}$$

é dada pela série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(- \frac{1}{\lambda} X_1(y,\lambda)X_o(y,\lambda)^{-1} - \frac{1}{\lambda^2} X_2(y,\lambda)X_o(y,\lambda)^{-1}\right)^n$$

e ainda mais, a matriz $R(y,\lambda)$ é inteira em λ com $|R(y,\lambda)|$ limitado para $0 \leq y \leq \ell$ e $|\mathrm{Re}\,\lambda|$ limitado. Obtemos dessa maneira uma expansão para a matriz $X(y,\lambda)^{-1}$, $\lambda \neq 0$, dada por

$$X(y,\lambda)^{-1} = X_o(y,\lambda)^{-1} - \frac{1}{\lambda} X_o(y,\lambda)^{-1}X_1(y,\lambda)X_o(y,\lambda)^{-1} + \frac{1}{\lambda^2} \overline{X_2}(y,\lambda)$$

onde

$$\overline{X_2}(y,\lambda) = X_o(y,\lambda)^{-1}R(y,\lambda).$$

Como

$$X(x,y,\lambda) = X(x,\lambda)X(y,\lambda)^{-1}$$

temos, multiplicando as expansões já obtidas, a expansão de $X(x,y,\lambda)$ dada no corolário. Para obter a segunda parte, observamos que

$$X_o(x,\lambda) = \begin{pmatrix} X_o^{11}(x,\lambda) & 0 \\ 0 & X_o^{22}(x,\lambda) \end{pmatrix} ; \; X_o(y,\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} X_o^{11}(y,\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & X_o^{22}(y,\lambda)^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$X_1(x,\lambda) = \begin{pmatrix} X_1^{11}(x,\lambda) & X_1^{12}(x,\lambda) \\ X_1^{21}(x,\lambda) & X_1^{22}(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

e daí substituindo na expansão de $X(x,y,\lambda)$ e efetuando as operações indicadas obtemos as expressões de $X^{ij}(x,y,\lambda)$; $i,j = 1,2$, colocadas no corolário. □

5. DISTRIBUIÇÃO DO ESPECTRO DO OPERADOR A E DECOMPOSIÇÃO DO ESPAÇO DE HILBERT H EM SOMA DIRETA DE SUB-ESPAÇOS INVARIANTES POR A

Sabemos, pelo parágrafo 2, que o espectro $\sigma(A)$, do operador A é formado pelos zeros da função inteira $h(\lambda)$ onde

$$h(\lambda) = \det H(\lambda)$$

com

$$H(\lambda) = X^{21}(\ell,\lambda)E + X^{22}(\ell,\lambda) - DX^{11}(\ell,\lambda)E - DX^{12}(\ell,\lambda)$$

que pode ser expandida, usando (1.21), para $\lambda \neq 0$, na forma

$$H(\lambda) = H_o(\lambda) + \frac{1}{\lambda} H_1(\lambda) + \frac{1}{\lambda^2} H_2(\lambda) \tag{1.22}$$

onde

$$H_o(\lambda) = X_o^{22}(\ell,\lambda) - DX_o^{11}(\ell,\lambda)E$$

$$H_1(\lambda) = X_1^{21}(\ell,\lambda)E + X_1^{22}(\ell,\lambda) - DX_1^{11}(\ell,\lambda)E - DX_1^{12}(\ell,\lambda)$$

e $H_2(\lambda)$ é inteira com $|H_2(\lambda)|$ limitado para $|\mathrm{Re}\,\lambda|$ limitado.

Como

$$X_o^{11}(\ell,\lambda) = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda \int_o^\ell \lambda_i(s)ds + \int_o^\ell a_{ii}(s)ds}\right)$$

$$\lambda_i < 0, \quad i = 1,\dots,N$$

$$X_o^{22}(\ell,\lambda) = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda \int_o^\ell \lambda_i(s)ds + \int_o^\ell a_{ii}(s)ds}\right)$$

$$\lambda_i > 0, \quad i = N+1,\dots,n$$

e D e E são matrizes constantes, podemos escrever que

$$h_o(\lambda) = \det H_o(\lambda) = \sum_{k=1}^{n_o} b_k e^{\lambda w_k}$$

com b_k e w_k reais, e ainda mais, usando a expansão (1.22), obtemos que

$$h(\lambda) = h_o(\lambda) + \frac{1}{\lambda} h_1(\lambda) \tag{1.23}$$

com h_1 inteira e limitada em faixas verticais do plano complexo.

LEMA 5.1: *Se* $Z = \{\lambda / h_o(\lambda) = 0\}$ *e* $\alpha < \beta$, *então:*

i) *Os elementos de* Z *possuem parte real limitada.*

ii) *Existe* N_o, *tal que* $h_o(\lambda)$ *tem no máximo* N_o *zeros em*

$$\{\lambda \,/\, \alpha \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \beta \quad e \quad t \leq \operatorname{Im}\lambda \leq t+1\}$$

qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$.

iii) *Para todo* $\delta > 0$, *existe* $m(\delta) > 0$ *tal que, se*

$$\alpha \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \beta \quad e \quad \operatorname{dist}(\lambda, Z) \geq \delta,$$

então $|h_o(\lambda)| \geq m(\delta)$.

DEMONSTRAÇÃO: Veja Levin [11].

TEOREMA 5.1: *Os pontos do espectro de* A, $\sigma(A) = \{\lambda \,|\, h(\lambda) = 0\}$, *possuem parte real menor ou igual a* w, *e se*

$$\sigma > \sigma_o = \sup\{\operatorname{Re}\lambda \,/\, h_o(\lambda) = 0\}$$

então, o número de elementos $\lambda \in \sigma(A)$, *com* $\sigma \leq \operatorname{Re}\lambda$, *é finito.*

DEMONSTRAÇÃO: Que os pontos do espectro de A possuem parte real menor ou igual a w segue do fato de que A é o gerador infinitesimal do C_o-Semi-Grupo $T(t)$ satisfazento $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$. Para completar a demonstração, suponha que a quantidade de zeros de $h(\lambda)$ com $\sigma \leq \operatorname{Re}\lambda \leq w$ é infinita, então se $(\lambda_j)_{j \in N}$ é uma sequência desses zeros, temos que $|\lambda_j| \to +\infty$, pois os zeros da função inteira h são pontos isolados, e de (1.23), que

$$h_o(\lambda_j) = \frac{-1}{\lambda_j} h_1(\lambda_j)$$

logo, como $|h_1(\lambda_j)|$ é limitado, obtemos que $|h_o(\lambda_j)| \to 0$ que contraria o item iii) do Lema 5.1.

TEOREMA 5.2 (Divisão do Espectro): *Seja* Γ *uma curva fechada, simples, diferenciavel por partes do plano complexo, tal que* $h \neq 0$ *em* Γ. *Definimos o operador linear* P_Γ, *definido sobre o espaço de Hilbert* H, *por:*

$$P_\Gamma u = \frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda : A)u\,d\lambda, \quad u \in H$$

Γ *orientada no sentido anti-horário. Então:*

i) P_Γ *é uma projeção linear contínua definida sobre* H.

ii) *Se* X = *Núcleo de* P_Γ *e* Y = *Imagem de* P_Γ, *temos que*

$$H = X \oplus Y$$

com X *e* Y *sub-espaços de* H *invariantes em relação ao operador* A *de tal maneira que a restrição de* A *a* X, *que é um operador linear fechado definido num sub-espaço vetorial denso de* X, *possui espectro formado pelos pontos do espectro de* A (*zeros de* h) *que estão fora da curva* Γ, *e a restrição de* A *a* Y, *é um operador* *linear limitado definido sobre* Y, *cujo espectro é formado pelos pontos do espectro de* A *que estão no interior da curva* Γ.

iii) *Se* $u_o \in X$ *e* $t > 0$, *temos que*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda : A) u_o \, d\lambda = 0.$$

iv) *Se* λ_o *é um zero simples de* h *e é o único zero do interior da curva* Γ, *temos que*

$$\dim Y = 1.$$

DEMONSTRAÇÃO: Para os itens i) e ii) veja (Kato [9]), para o item iii) veja (Ribeiro [19]) e para iv), temos por hipótese que

$$h(\lambda) = (\lambda - \lambda_o) h^*(\lambda)$$

com $h^* \neq 0$ no interior de Γ, portanto podemos afirmar que $H(\lambda_o)$ é uma matriz com núcleo de dimensão 1. Por outro lado como, para $\lambda \in \mathbb{C}$ com $h(\lambda) \neq 0$ temos que

$$R(\lambda : A)\binom{f}{g}(x) = X(x,\lambda)\begin{pmatrix} E\psi(0) \\ \psi(0) \end{pmatrix} + \int_o^x X(x,y,\lambda)\begin{pmatrix} f_1(y) \\ g_1(y) \end{pmatrix} dy$$

onde

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = K^{-1}\binom{f}{g}$$

$$\psi(0) = H(\lambda)^{-1} \cdot \beta(f,g,\lambda)$$

com

$$\beta(f,g,\lambda)_{(n-N)\times 1} = \int_0^{\ell} \Big[\Big(-X^{21}(\ell,y,\lambda) + DX^{11}(\ell,y,\lambda)\Big) f_1(y) +$$

$$+ \Big(- X^{22}(\ell,y,\lambda) + DX^{12}(\ell,y,\lambda)\Big) g_1(y)\Big]\, dy$$

e a última parcela do operador resolvente é analítica no interior de Γ , vem, para $(f,g) \in H$, que

$$P_\Gamma\binom{f}{g}(x) = \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\lambda : A)\binom{f}{g}(x)d\lambda =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma X(x,\lambda) \begin{pmatrix} EH(\lambda)^{-1} \cdot \beta(f,g,\lambda) \\ \\ H(\lambda)^{-1} \cdot \beta(f,g,\lambda) \end{pmatrix} d\lambda$$

Fazendo

$$G(\lambda) = (\lambda - \lambda_o) \cdot H(\lambda)^{-1}$$

temos que $G(\lambda)$ é analítica num domínio contendo Γ e seu interior, e

$$G(\lambda_o) = \lim_{\lambda \to \lambda_o} (\lambda - \lambda_o) H(\lambda)^{-1}.$$

Observe que a matriz $G(\lambda)$ também pode ser olhada como

$$G(\lambda) = \frac{1}{h^*(\lambda)} \operatorname{adj} H(\lambda)$$

onde $\operatorname{adj} H(\lambda)$ é a transposta da matriz dos cofatores de $H(\lambda)$, portanto temos que

$$P_\Gamma\left(\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right)(x) = \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda - \lambda_o} X(x,\lambda) \begin{pmatrix} E\,G(\lambda) \cdot \beta(f,g,\lambda) \\ G(\lambda) \cdot \beta(f,g,\lambda) \end{pmatrix} d\lambda$$

$$= - \text{resíduo} \left[\frac{1}{\lambda - \lambda_o} X(x,\lambda) \begin{pmatrix} E\,G(\lambda) \cdot \beta(f,g,\lambda) \\ G(\lambda) \cdot \beta(f,g,\lambda) \end{pmatrix} \right]_{\lambda = \lambda_o} =$$

$$= - X(x,\lambda_o) \begin{pmatrix} E\,G(\lambda_o) \cdot \beta(f,g,\lambda_o) \\ G(\lambda_o) \cdot \beta(f,g,\lambda_o) \end{pmatrix}$$

Como

$$H(\lambda_o) \cdot G(\lambda_o) = \lim_{\lambda \to \lambda_o} H(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_o) H(\lambda)^{-1} =$$

$$= \lim_{\lambda \to \lambda_o} (\lambda - \lambda_o) I = 0$$

vem que a imagem de $G(\lambda_o)$ está contida no núcleo de $H(\lambda_o)$, portanto

$$\dim(\operatorname{Im} G(\lambda_o)) = 1$$

logo existe $\alpha(\lambda_o) \in \mathbb{C}^{n-N}$, gerador da imagem de $G(\lambda_o)$, de tal modo que

$$G(\lambda_o) \cdot \beta(f,g,\lambda_o) = k(f,g,\lambda_o) \cdot \alpha(\lambda_o)$$

onde $k(f,g,\lambda_o) \in \mathbb{C}$, portanto

$$P_\Gamma\binom{f}{g}(x) = -\,k(f,g,\lambda_o) \cdot \left[X(x,\lambda_o) \begin{pmatrix} E\,\alpha(\lambda_o) \\ \alpha(\lambda_o) \end{pmatrix} \right]$$

donde podemos concluir que $Y = P_\Gamma(H)$ tem dimensão 1 e é gerado por

$$X(x,\lambda_o) \begin{pmatrix} E\,\alpha(\lambda_o) \\ \alpha(\lambda_o) \end{pmatrix} \qquad \square$$

6. EXPANSÃO DO OPERADOR RESOLVENTE $R(\lambda : A)$ E ESTIMATIVAS EXPONENCIAIS PARA O SEMI-GRUPO GERADO POR A

LEMA 6.1: *Seja* σ_o *como no teorema 5.1 e* $\sigma_o < \alpha < \beta$, *então para os valores complexos de* λ *tais que*

$$\alpha \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \beta, \quad h(\lambda) \neq 0 \quad e \quad \lambda \neq 0$$

temos que:

i) $$\frac{1}{h_o(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda\gamma_k} \quad \text{com} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| e^{\operatorname{Re}\lambda\gamma_k} < \infty$$

ii) $|H_o(\lambda)^{-1}|$ *é limitado*

iii) $$H(\lambda)^{-1} = H_o(\lambda)^{-1} - \frac{1}{\lambda}[H_o(\lambda)^{-1}H_1(\lambda)H_o(\lambda)^{-1}] + \frac{1}{\lambda^2}F(\lambda)$$

com $|F(\lambda)|$ *limitado.*

DEMONSTRAÇÃO: Os itens i) e ii) seguem do resultado de Pitt, veja [18]. A expansão dada em iii) é obtida pelo mesmo processo usado na demonstração do Corolário 4.1. □

Daremos no próximo teorema uma expansão para o operador resolvente $R(\lambda : A)$ do operador A, onde colocaremos somente as expressões da primeira componente desse operador, isto devido ao tamanho das expressões envolvidas e do fato que a segunda componente, tem o mesmo tipo da primeira, não necessitando portanto de uma análise especial.

TEOREMA 6.1: *Seja* σ_o *como no teorema 5.1. Para os valores* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tais que*

$$h(\lambda) = \det H(\lambda) \neq 0 \quad e \quad \sigma_o < \operatorname{Re}\lambda$$

temos, para $(f,g) \in H$ *e* $\lambda \neq 0$, *que*

$$R(\lambda : A)\binom{f}{g} = R_o(\lambda : A)\binom{f}{g} + \\ + \frac{1}{\lambda} R_1(\lambda : A)\binom{f}{g} + \frac{1}{\lambda^2} R_2(\lambda : A)\binom{f}{g}$$

onde

$$\left\| R_2(\lambda : A)\binom{f}{g}\right\|$$

é limitado para $\sigma_o < \alpha \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \beta$ *e ainda se:*

$$R_o(\lambda : A)\binom{f}{g} = \begin{pmatrix} \varphi_o \\ \psi_o \end{pmatrix}$$

$$R_1(\lambda : A)\binom{f}{g} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$$

então

$$\varphi_0(x) = X_0^{11}(x,\lambda)EH_0(\lambda)^{-1}\int_0^{\ell}\Big[DX_0^{11}(\ell,\lambda)X_0^{11}(y,\lambda)^{-1}f_1(y) -$$

$$- X_0^{22}(\ell,\lambda)X_0^{22}(y,\lambda)^{-1}g_1(y)\Big]dy + \int_0^x X_0^{11}(x,\lambda)X_0^{11}(y,\lambda)^{-1}f_1(y)\,dy$$

$$\varphi_1(x) = X_0^{11}(x,\lambda)EH_0(\lambda)^{-1}\int_0^{\ell}\Big\{\Big[- X_1^{21}(\ell,\lambda) + DX_1^{11}(\ell,\lambda) +$$

$$+ X_0^{22}(\ell,\lambda)X_0^{22}(y,\lambda)^{-1}X_1^{21}(y,\lambda) - DX_0^{11}(\ell,\lambda)X_0^{11}(y,\lambda)^{-1}X_1^{11}(y,\lambda)\Big]X_0^{11}(y,\lambda)^{-1}f_1(y) +$$

$$+ \Big[- X_1^{22}(\ell,\lambda) + DX_1^{12}(\ell,\lambda) + X_0^{22}(\ell,\lambda)X_0^{22}(y,\lambda)^{-1}X_1^{22}(y,\lambda) -$$

$$- DX_0^{11}(\ell,\lambda)X_0^{11}(y,\lambda)^{-1}X_1^{12}(y,\lambda)\Big]\, X_0^{22}(y,\lambda)^{-1}g_1(y)\Big\}\, dy +$$

$$+ \Big[\Big(X_1^{11}(x,\lambda)E + X_1^{12}(x,\lambda)\Big)\, H_0(\lambda)^{-1} - X_0^{11}(x,\lambda)EH_0(\lambda)^{-1}H_1(\lambda)H_0^{-1}(\lambda)\Big] \cdot \int_0^{\ell}\Big[DX_0^{11}(\ell,\lambda)\,\cdot$$

$$\cdot\, X_0^{11}(y,\lambda)^{-1}f_1(y) - X_0^{22}(\ell,\lambda)X_0^{22}(y,\lambda)^{-1}g_1(y)\Big]\, dy +$$

$$+ \int_0^x \Big\{\Big[X_1^{11}(x,\lambda) - X_0^{11}(x,\lambda)X_0^{11}(y,\lambda)^{-1}\cdot X_1^{11}(y,\lambda)\Big]X_0^{11}(y,\lambda)^{-1}f_1(y) +$$

$$+ \Big[X_1^{12}(x,\lambda) - X_0^{11}(x,\lambda)X_0^{11}(y,\lambda)^{-1}X_1^{12}(y,\lambda)\Big]X_0^{22}(y,\lambda)^{-1}g_1(y)\Big\}\, dy$$

e

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = K^{-1}\binom{f}{g}$$

DEMONSTRAÇÃO: Temos, pelo parágrafo 2, que a primeira componente do operador resolvente é

$$\left[X^{11}(x,\lambda)E + X^{12}(x,\lambda)\right] \psi(0) +$$

$$+ \int_0^x \left[X^{11}(x,y,\lambda)f_1(y) + X^{12}(x,y,\lambda)g_1(y)\right] dy$$

onde

$$\psi(0) = H(\lambda)^{-1} \int_0^{\ell} \Big\{ \Big(- X^{21}(\ell,y,\lambda) + DX^{11}(\ell,y,\lambda) \Big) f_1(y) +$$

$$+ \Big(- X^{22}(\ell,y,\lambda) + DX^{12}(\ell,y,\lambda)\Big) g_1(y) \Big\} dy$$

logo para obter a expansão dada neste teorema, basta substituir nas expressões acima, as expansões colocadas em (1.21), no Colário 4.1 e no Lema 6.1. □

TEOREMA 6.2: *(Translação) Seja*

$$\Gamma = [\alpha, b] \times [-r, r]$$

o retângulo do plano complexo, onde $\sigma_0 < \alpha$, $h(\lambda)$ *não se anula em* $Re(\lambda) = \alpha$, $b > \max\{0, w\}$ *e* $r \geq r_0$ *, de modo que* Γ *contenha em seu interior todos os zeros de* h *com parte real maior que* α*. Então, se* X = Núcleo de P_Γ *dado pelo teorema 5.2, temos que*

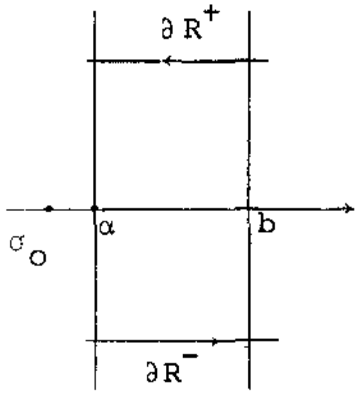
$$T(t)u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)ud\lambda$$

para $u \in \mathcal{D}(A^2) \cap X$ *e* $t > 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\alpha > \max\{0, w\}$ o teorema é imediato. Caso contrário, usando os teoremas 5.2 e 3.1, temos para obter que

$$T(t)u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)ud\lambda$$

se $u \in \mathcal{D}(A^2) \cap X$ e $t > 0$, basta mostrar que



$$\lim_{r\to\infty} \int_{\partial R^{\pm}} e^{\lambda t} R(\lambda : A)ud\lambda = 0$$

onde $\partial R^{\pm}$ indica os segmentos do plano complexo com extremidades $\alpha \pm ir$ e $b \pm ir$ respectivamente, e para isto é suficiente verificar o termo em λ^o do operador resolvente, $R_o(\lambda : A)u$, dado no teorema 6.1, que envolve expressões do tipo

$$a(x)\, e^{\lambda\left(\int_o^x \mu + \int_o^{\ell} \mu\right)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda\gamma_k}\right) \int_o^{\ell} b(y)\, e^{-\lambda\int_o^y \mu}\, h(y)dy$$

que pode ser simplificada para a forma

$$\beta(x,\lambda) \int_0^{\ell} e^{-\lambda \int_0^y \mu} f(y)dy$$

onde $|\beta(x,\lambda)|$ é limitado se $0 \leq x \leq \ell$ e $\alpha \leq \mathrm{Re}\,\lambda \leq b$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que f é continuamente diferenciavel e daí, como $\mu \neq 0$, através de uma integração por partes, podemos mostrar que

$$\left| \int_{\partial R^{\pm}} e^{\lambda t} \left(\beta(x,\lambda) \int_0^{\ell} e^{-\lambda \int_0^y \mu} f(y)dy \right) d\lambda \right| \leq K(t) \frac{1}{r}$$

completando a demonstração. □

TEOREMA 6.3: (*Estimativa exponencial*): *Seja* α *tal que* $\sigma_o < \alpha$ *e* $h(\lambda)$ *não se anula em* $\mathrm{Re}\,\lambda = \alpha$. *Escolhemos* r_o *tal que*

$$\Gamma = [\alpha, b] \times [-r_o, r_o]$$

contenha em seu interior todos os zeros de h *com parte real maior que* α. *Então existe* K (*que depende de* α) *tal que*

$$\|T(t)u\|_H \leq K e^{\alpha t} \|u\|_H, \qquad t \geq 0$$

se $u \in \mathcal{D}(A^2) \cap X$, *onde* X = Núcleo de P_Γ

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema 6.2, temos para α e u nas condições acima, que

$$T(t)u = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)ud\lambda, \qquad t \geq 0.$$

Usaremos a expansão do operador resolvente, dada no Teorema 6.1, para obter a estimativa exponencial colocada no enunciado. Aqui, como no Teorema 6.1, trabalharemos somente com a primeira componente do resolvente. A estimativa para o termo em λ^{-2} é imediata, para os termos em λ^{o} e λ^{-1} veja os cálculos abaixo:

1ª PARTE: O termo em λ^{o} envolve expressões do tipo:

$$a(x)\, e^{\lambda\left(\int_o^x \mu + \int_o^\ell \mu\right)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda\gamma_k}\right)\int_o^\ell b(y)\, e^{-\lambda\int_o^y \mu} h(y)dy$$

onde a, b e μ são funções contínuas definidas em $[0, \ell]$, $\gamma_k \in \mathbb{R}$ e $\mu \neq 0$, logo a estimativa exponencial para este termo pode ser justificada usando a integral *protótipo* seguinte:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t}\left[a(x)e^{\lambda\left(\int_o^x \mu + \int_o^\ell \mu\right)}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda\gamma_k}\right)\int_o^\ell b(y)\, e^{-\lambda\int_o^y \mu} h(y)dy\right]d\lambda.$$

e fazendo $\lambda = \alpha + is$ e $\int_o^x \mu + \int_o^\ell \mu = c(x)$, temos que esta integral pode ser colocada na forma

$$(1.24)\qquad \frac{1}{2\pi}\, a(x)e^{\alpha t}\, e^{\alpha c(x)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{\alpha\gamma_k}\,.$$

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^{\ell} \left[b(y)\, e^{-\alpha\int_0^y \mu}\, h(y) \int_{-r}^{r} e^{is(t + c(x) + \gamma_k - \int_0^y \mu)}\, ds \right] dy$$

resolvendo a integral em s, obtemos que a segunda linha de (1.24) é igual a

$$(1.25)\qquad \lim_{r\to\infty} \int_0^{\ell} b(y)\, e^{-\alpha\int_0^y \mu}\, h(y)\, \frac{2\,\mathrm{sen}\, r(t + c(x) + \gamma_k - \int_0^y \mu)}{t + c(x) + \gamma_k - \int_0^y \mu}\, dy$$

fazendo $h = 0$ fora do intervalo $[0,\ell]$ e colocando $z = \int_0^y \mu$, temos que $y = \xi(z)$ com ξ continuamente diferenciavel de modo que (1.25) é igual a

$$(1.26)\qquad 2\lim_{r\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi(z))e^{-\alpha z} h(\xi(z))\, \frac{\mathrm{sen}\, r(t + c(x) + \gamma_k - z)}{t + c(x) + \gamma_k - z}\, \xi'(z)\, dz$$

como, vale a fórmula

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, \frac{\mathrm{sen}\, r(\theta - z)}{\theta - z}\, dz = \frac{\pi}{2} \left[f(\theta + 0) + f(\theta - 0) \right]$$

se f é de variação limitada, veja [21] pg. 25, temos que (1.26) é igual a

$$\pi b(\xi(t + c(x) + \gamma_k))\, e^{-\alpha(t+c(x)+\gamma_k)}\, \xi'(t + c(x) + \gamma_k) \cdot$$

$$\left[h(\xi(t + c(x) + \gamma_k + 0)) + h(\xi(t + c(x) + \gamma_k - 0))\right]$$

e esta expressão é não nula somente se $0 \leq \xi(t + c(x) + \gamma_k) \leq \ell$ portanto $t + c(x) + \gamma_k$ também é limitado e levando em conta que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| e^{\alpha\gamma_k} < \infty$ podemos escrever que (1.24) em módulo é menor ou igual a

$$K_1 e^{\alpha t} |h(\xi(t + c(x) + \gamma_k + 0)) + h(\xi(t + c(x) + \gamma_k - 0))|$$

e daí obter finalmente que

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} \left[a(x) e^{\lambda c(x)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda\gamma_k} \right) \int_0^{\ell} b(y)\, e^{-\lambda \int_0^y \mu}\, h(y)dy \right] d\lambda \right\|_{L^2} \leq$$

$$\leq K e^{\alpha t} \| h \|_{L^2} .$$

2ª PARTE: As matrizes que entram no termo em λ^{-1} do operador resolvente dado no Teorema 6.1 possuem em cada posição expressões do tipo

$$a(x) e^{\lambda\gamma(x)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda\gamma_k}, \quad b(y)\, e^{\lambda\beta(y)}$$

logo após efetuarmos as operações indicadas no referido teorema, vamos obter uma matriz que em cada posição possue uma soma finita de termos do tipo

$$\frac{1}{\lambda}\ a(x)\ e^{\lambda\gamma(x)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda\gamma_k}\right) \int_0^{\ell} b(y) e^{\lambda\beta(y)}\ h(y)\, dy$$

logo uma integral *protótipo*, para este caso, terá a forma

$$(1.27)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left[\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\ a(x) e^{\lambda\gamma(x)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda\gamma_k}\right) \int_0^{\ell} b(y) e^{\lambda\beta(y)}\ h(y)\, dy\right] d\lambda$$

.

onde a, γ, b e β são contínuas em $[0,\ell]$. Fazendo $\lambda = \alpha + is$ em (1.27) obtemos

$$(1.28)\qquad a(x)\ e^{\alpha t}\ e^{\alpha\gamma(x)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\alpha\gamma_k}\ .$$

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^{\ell} \left[b(y)\ e^{\alpha\beta(y)} h(y) \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} \frac{e^{is(t+\gamma_k+\gamma(x)+\beta(y))}}{\alpha + is}\, ds\right] dy\ .$$

Não é difícil calcular e obter que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} \frac{e^{is(t+\gamma_k+\gamma(x)+\beta(y))}}{\alpha + is} \, ds =$$

$$= \begin{cases} ie^{-\alpha(t+\gamma_k+\gamma(x)+\beta(y))} & \text{se} \quad \alpha(t+\gamma_k+\gamma(x)+\beta(y)) > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad (t+\gamma_k+\gamma(x)+\beta(y)) = 0 \\ 0 & \text{se} \quad \alpha(t+\gamma_k+\gamma(x)+\beta(y)) < 0 \end{cases}$$

logo

$$\left| \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^{r} \frac{e^{is(t+\gamma_k+\gamma(x)+\beta(y))}}{\alpha + is} \, ds \right| \leq 1$$

e daí segue que (1.27) em módulo é menor ou igual a

$$|a(x)|\, e^{\alpha t}\, e^{\alpha\gamma(x)} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| e^{\alpha\gamma_k} \int_0^{\ell} |b(y)| e^{\alpha\beta(y)} |h(y)| dy$$

logo existe K_1 tal que este termo é menor ou igual a

$$K_1 e^{\alpha t} \int_0^{\ell} |h(y)| dy$$

portanto

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \left[\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\, a(x)\, e^{\lambda\gamma(x)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda\gamma_k} \right) \int_0^{\ell} b(y) e^{\lambda\beta(y)} h(y)\,dy \right] d\lambda \right\|_{L^2}$$

$$\leq K e^{\alpha t} \| h \|_{L^2} \; ; \qquad t > 0. \qquad \square$$

COROLÁRIO 6.1: *Com as mesmas hipóteses do Teorema 6.3, temos que existe* K *tal que*

$$\| T(t) u \|_H \leq K e^{\alpha t} \| u \|_H \qquad t \geq 0$$

para $u \in X =$ Núcleo de P_Γ .

CAPÍTULO II

BIFURCAÇÃO DE HOPF EM ESPAÇOS DE DIMENSÃO INFINITA COM PERTURBAÇÃO NA PARTE ILIMITADA

1. DIFERENCIABILIDADE EM RELAÇÃO AO PARÂMETRO

Seja $(W, \| \ \|)$ um espaço de Banach e $[-\eta,\eta]$, $\eta > 0$, um intervalo real. Suponhamos que para cada $r \in [-\eta,\eta]$, temos um operador linear fechado $A(r)$, definido num sub-espaço vetorial $\mathcal{D}(A(r)) = \mathcal{D}$ (independente de r), denso em W, e com valores em W tal que:

(HA-1) *O operador* $A(r)$, $r \in [-\eta,\eta]$, *é fortemente continuamente diferenciavel em* $\mathcal{D}$, *isto é, a função* $u(r) = A(r)u$ *para* $u \in \mathcal{D}$ *é continuamente diferenciavel em* $[-\eta,\eta]$ *com*

$$u'(r) = A'(r)u.$$

Temos portanto, que $A'(r)$ é um operador linear definido em $\mathcal{D}$, fortemente contínuo em $\mathcal{D}$. Indicaremos por ρ o conjunto formado pelos valores complexos λ tais que $\lambda - A(r)$ possui inversa limitada $R(\lambda : A(r)) = (\lambda - A(r))^{-1}$ para $r \in [-\eta,\eta]$.

TEOREMA 1.1: *Nas condições acima, se* $\lambda \in \rho$, *temos que:*

i) $A(r)R(\lambda : A(s))$ *é um operador linear limitado definido* *em* W, *contínuo na norma do espaço* $\mathcal{L}(W,W)$ *dos operadores lineares limitados, em relação a* r *e* s, $-\eta \leq r$, $s \leq \eta$.

ii) $A(r)R(\lambda : A(s))$ *e* $R(\lambda : A(r))$ *são fortemente diferenciaveis em relação a* r *com*

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(A(r)R(\lambda : A(s)) \right) = A'(r)R(\lambda : A(s))$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(R(\lambda : A(r)) \right) = R(\lambda : A(r))A'(r)R(\lambda : A(r))$$

e ainda mais $A'(r)R(\lambda : A(s))$ *é um operador linear limitado fortemente contínuo com função das duas variáveis* r *e* s.

DEMONSTRAÇÃO: Para a demonstração veja Krein [10], páginas 176 - 180.

Em particular, segue desse lema e do Teorema de Banach-Steinhaus, que $A'(r)R(\lambda : A(r))$ é uniformente limitado,

$$\|A'(r)R(\lambda : A(r))\|_{\mathcal{L}(W,W)} \leq c \qquad r \in [-\eta,\eta].$$

Suponhamos ainda que:

(HA-2) *O operador* $A(r)$ *é o gerador infinitesimal de um Semi-Grupo, fortemente contínuo, de operadores lineares limitados*

$$T(r,t); \qquad t \geq 0$$

tal que

$$\|T(r,t)\|_{\mathcal{L}(W,W)} \leq Me^{\beta t}, \quad t \geq 0$$

onde M *e* β *são constantes positivas que independem de* r.

OBSERVAÇÃO 1.1: Para simplificar as expressões deste parágrafo, vamos supor, sem perda de generalidade, que $0 \in \rho$, de modo que

$$A^{-1}(r); \qquad r \in [-\eta, \eta]$$

é um operador limitado.

TEOREMA 1.2: *Nas condições anteriores, temos que:*

i) *Se* $r_n \to r$ *em* $[-\eta, \eta]$, *quando* $n \to \infty$, *então*

$$T(r_n,t)w \to T(r,t)w, \quad t \geq 0, \quad w \in W$$

quando $n \to \infty$, *uniformemente em* t *e* w *para* $t \in [0,T]$, $T > 0$, *e* $w \in \mathbb{K}$ *onde* $\mathbb{K}$ *é um sub-conjunto compacto de* W.

ii) $T(r,t)$ *é fortemente diferenciável em relação a* r *em* $\mathcal{D}$ *com*

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(T(r,t)u\right) = \int_0^t T(r,t-s)A'(r)T(r,s)u\,ds, \qquad u \in \mathcal{D}.$$

DEMONSTRAÇÃO: i) Como $A(\cdot)u$ é contínuo se $u \in \mathcal{D}$, segue do teorema de aproximação de Trotter, veja 3.4 de Pazy [17] que

$$T(r_n,t)w \to T(r,t)w$$

quando $n \to \infty$, uniformemente para t em intervalos limitados e $w \in W$. Logo para $w \in \mathbb{K}$ existe n_w tal que

$$\|T(r_n,t)w - T(r,t)w\| < \varepsilon/3$$

se $n \geq n_w$ qualquer que seja $t \in [0,T]$. Para $w' \in B_\delta(w)$ onde $B_\delta(w)$ é a bola aberta com centro em w e raio $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3Me^{\beta T}}$, temos que

$$\|T(r_n,t)w' - T(r,t)w'\| \leq \|T(r_n,t)w' - T(r_n,t)w\| +$$

$$+ \|T(r_n,t)w - T(r,t)w\| + \|T(r,t)w - T(r,t)w'\| \leq$$

$$\leq 2Me^{\beta T} \|w' - w\| + \|T(r_n,t)w - T(r,t)w\| < \varepsilon$$

se $n \geq n_w$.

As bolas $B_\delta(w)$ cobrem o compacto $\mathbb{K}$, logo tomando a subcobertura finita $B_\delta(w_1),\dots,B_\delta(w_k)$ e

$$n_o = \max\{n_{w_1}, \dots, n_{w_k}\}$$

temos, para $n \geq n_o$, que

$$\| T(r_n,t)w - T(r,t)w \| < \varepsilon$$

para todo t em $[0,T]$ e todo $w \in \mathbb{K}$.

Para o item ii) temos de mostrar que

$$(1.1) \qquad T(r+h,t)u - T(r,t)u - h\int_o^t T(r,t-s)A'(r)T(r,s)uds$$

é $o(h)$ quando $h \to 0$, para $t \in [0,T]$, $T > 0$. Usando o Lema 4.1, pg. 87 de Pazy [17] temos que

$$A^{-1}(r+h)\Big[T(r+h,t) - T(r,t)\Big]A^{-1}(r)w =$$

$$= \int_o^t T(r+h,t-s)\Big[A^{-1}(r) - A^{-1}(r+h)\Big]T(r,s)wds$$

vale para $w \in W$ e $t \geq 0$, portanto tomando $w \in W$ tal que

$$u = A^{-1}(r)w$$

podemos escrever que

$$T(r+h,t)u - T(r,t)u =$$

$$= A(r+h)\int_o^t T(r+h \quad -s)\Big[A^{-1}(r) - A^{-1}(r+h)\Big]T(r,s)wds$$

e usando que $A(r)$ é um operador fechado e comuta com $T(r,t)$ em $\mathcal{D}$, para $r \in [-\eta, \eta]$ e $t \geq 0$, obtemos que

$$T(r+h,t)u - T(r,t)u =$$

$$= \int_0^t T(r+h,t-s)\Big[A(r+h) - A(r)\Big]A^{-1}(r)T(r,s)w\,ds$$

portanto, como $A^{-1}(r)$ também comuta com $T(r,t)$, temos que (1.1) é igual a

$$\int_0^t T(r+h,t-s)\Big[A(r+h)A^{-1}(r) - A(r)A^{-1}(r) - hA'(r)A^{-1}(r)\Big]T(r,s)w\,ds$$

$$+ h\int_0^t \Big[T(r+h,t-s)A'(r)A^{-1}(r) - T(r,t-s)A'(r)A^{-1}(r)\Big]\ T(r,s)w\,ds$$

a segunda parcela da soma acima é $o(h)$ pelo item i) desse teorema e pelo Teorema 1.1, para a primeira parcela, observamos que

$$\Big[A(r+h)A^{-1}(r) - A(r)A^{-1}(r)\Big]T(r,s)w =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{d\theta}\, A(r+\theta h)A^{-1}(r)\ T(r,s)w\,d\theta =$$

$$= h\int_0^1 A'(r+\theta h)A^{-1}(r)T(r,s)w\,d\theta$$

portanto

$$\left[A(r+h)A^{-1}(r) - A(r)A^{-1}(r) - hA'(r)A^{-1}(r)\right] T(r,s)w =$$

$$= h\int_0^1 \left[A'(r+\theta h)A^{-1}(r) - A'(r)A^{-1}(r)\right] T(r,s)w\,d\theta$$

como $\{T(r,s)w : 0 \leq s \leq T\}$ é compacto em W temos que este termo é $o(h)$ quando $h \to 0$, uniformemente em s, para $0 \leq s \leq T$, logo a primeira parcela da soma acima também é $o(h)$, quando $h \to 0$, completando a demonstração do teorema. □

Segue dos Teoremas 1.1 e 1.2 o seguinte corolário:

COROLÁRIO 1.1: *Se* $f(r,t)$ *é continuamente diferenciavel em* r *e* t, *para* $r \in [-\eta,\eta]$ *e* $t \geq 0$, *e* $\lambda \in \rho$, *então*

$$T(r,t)R(\lambda : A(r))f(r,t)$$

é continuamente diferenciavel em relação a r *e a* t.

Consideremos o problema de evolução a valores iniciais não linear em W.

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dw}{dt} = Aw + f(t,w) \\ \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um Semi-Grupo, fortemente contínuo $T(t)$ e f é uma função contínua de $[0,T] \times W$ em W.

DEFINIÇÃO 1.1: *Uma função contínua* $w(t)$, $0 \leq t < t_1$ *é chamada de solução "mild" do problema a valores inciais (1.2) se* $w(t)$ *satisfaz a equação integral*

$$w(t) = T(t)w_o + \int_o^t T(t-s)f(s,w(s))ds.$$

Nessas condições podemos enunciar o seguinte resultado.

TEOREMA 1.3: *Se* $w : [0,t_1) \to W$ *é uma solução "mild" de (1.2),* $w_o \in \mathcal{D}(A)$ *e* f *é continuamente diferenciável, então* w *é continuamente diferenciável.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja t_o um ponto de $(0,t_1)$, mostraremos que w é continuamente diferenciável em $[0,t_o]$. O problema a valores iniciais

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = Av + f_t(t,w(t)) + f_w(t,w(t))v \\ \\ v(0) = Aw_o + f(0,w_o) \end{cases}$$

possui uma solução "mild" $v(t)$ contínua em $[0,t_o]$. A idéia é mostrar que $w(t)$ é diferenciável com $\dot{w}(t) = v(t)$, para isto, consideremos

$$R_h(t) = w(t + h) - w(t) - hv(t)$$

logo

(1.3) $$w(t + h) - w(t) = R_h(t) + hv(t)$$

e temos de mostrar que $\|R_h(t)\|$ é $o(h)$ quando $h \to 0$,

$$R_h(t) = T(t + h)w_o + \int_o^{t+h} T(t + h - s)f(s,w(s))\, ds -$$

$$- T(t)w_o + \int_o^t T(t - s)f(s,w(s))ds -$$

$$- hT(t) \quad (Aw_o + f(0,w_o)) -$$

$$- h \int_o^t T(t - s) \left[f_t(s,w(s)) + f_w(s,w(s))\; v(s) \right] ds.$$

Notando que

$$\int_o^t T(t - s)f(s + h,w(s + h))ds = \int_h^{t+h} T(t + h - s)f(s,w(s))\, ds$$

podemos escrever que

$$R_h(t) = T(t)\Big[(T(h) - I)w_o - hAw_o\Big] +$$

$$+ \int_o^h \Big[T(t+h-s)f(s,w(s)) - T(t)f(0,w_o)\Big]\,ds +$$

(1.4)

$$+ \int_o^t T(t-s)\Big[f(s+h,w(s+h)) - f(s,w(s+h)) - hf_t(s,w(s))\Big]ds$$

$$+ \int_o^t T(t-s)\Big[f(s,w(s+h)) - f(s,w(s)) - hf_w(s,w(s))v(s)\Big]\,ds$$

as três primeiras parcelas são $o(h)$ quando $h \to 0$, com relação à última parcela, observamos que

$$f(s,w(s+h)) - f(s,w(s)) = \int_o^1 \frac{d}{d\theta}(f(s,\theta w(s+h) + (1-\theta)w(s))\,d\theta =$$

$$= \int_o^1 f_w(s,\theta w(s+h) + (1-\theta)w(s)) \cdot (w(s+h) - w(s))\,d\theta$$

colocando

$$S(s,h) = \int_o^1 f_w(s,\theta w(s+h) + (1-\theta)w(s))\,d\theta$$

temos, pela continuidade de $f_w(s,w)$ e pela compacidade de $\{w(s) : 0 \le s \le t_o\}$ que $f_w(s,w)$ é limitado para w numa vizinhança de $\{w(s) : 0 \le s \le t_o\}$ de modo que, para h suficientemente pequeno, o operador $S(s,h)$ é uniformemente limitado, $0 \le s \le t_o$, e $S(s,h)$ é fortemente convergente para $f_w(s,w(s))$, portanto usando (1.3) podemos escrever que

$$f(s,w(s+h)) - f(s,w(s)) = S(s,h)R_h(s) + hS(s,h) \cdot v(s)$$

por (1.4) que

$$R_h(t) = \int_o^t T(t-s)\left[S(s,h)R_h(s) + h(S(s,h)) - f_w(s,w(s))v(s)\right]ds + o(h)$$

portanto

$$\| R_h(t) \| \leq K\int_o^t \| R_h(s) \| \, ds + o(h)$$

logo, obtemos que

$$\| R_h(t) \| \leq e^{Kt_o} o(h)$$

completando a demonstração. □

Consideremos agora o problema a valores iniciais perturbado em W

$$(1.5) \qquad \begin{cases} \dfrac{dw}{dt} = A(r)w + f(r,w) \\ \\ w(r,0) = w_o(r) \end{cases}$$

onde $A(r)$ satisfaz as hipóteses (HA-1, 2) anteriores e $f(r,w)$ é uma função contínua de $[-\eta,\eta] \times W$ em W.

TEOREMA 1.4: *Se* $w_o(r) \in \mathcal{D}$ *e* $A(r)\, w_o(r)$ *é contínua para* $r \in [-\eta,\eta]$, $f(r,w)$ *é continuamente diferenciável e* $w(r,t)$ *é uma solução "mild" de (1.5) contínua em* r *e* t *para* $r \in [-\eta,\eta]$ *e* $t \in [0,t_o]$, *então* $w(r,t)$ *é continuamente diferenciável em relação a* t *com* $\dot{w}(r,t) \to \dot{w}(\bar{r},t)$, *quando* $r \to \bar{r}$, *uniformemente em* t *para* $t \in [0,t_o]$.

DEMONSTRAÇÃO: Temos pelo teorema anterior que, para cada $r \in [-\eta,\eta]$, $w(r,t)$ é diferenciável em relação a t e se $\dot{w}(r,t) = v(r,t)$, então

$$v(r,t) = T(r,t)v_o(r) + \int_o^t T(r,t-s)f_w(r,w(r,s)) \cdot v(r,s)ds$$

onde $v_o(r) = A(r)w_o(r) + f(r,w_o(r))$ é contínua e $v(r,t)$ é contínua em t para r fixo. Para r e $\bar{r}$ em $[-\eta,\eta]$ temos que

$$v(r,t) - v(\bar{r},t) = T(r,t)v_o(r) - T(\bar{r},t)v_o(\bar{r}) +$$

$$(1.6) \quad + \int_o^t T(r,t-s)f_w(r,w(r,s)) \left[v(r,s) - v(\bar{r},s)\right] ds +$$

$$+ \int_o^t \left[T(r,t-s)f_w(r,w(r,s)) - T(\bar{r},t-s)f_w(\bar{r},w(\bar{r},s))\right] v(\bar{r},s)ds$$

chamando de S_r o operador, dado por

$$S_r u(t) = \int_0^t T(r,t-s) f_w(r,w(r,s))u(s)ds$$

definido sobre o espaço $C([0,t_o])$, das funções contínuas de $[0,t_o]$ em W com a norma usual do supremo, temos que $(I - S_r)$ é inversível com inversa $(I - S_r)^{-1}$ uniformemente limitada por uma constante k, para $r \in [-\eta,\eta]$, de modo que da igualdade (1.6) podemos escrever

$$\|v(r,t) - v(\bar{r},t)\| \leq \|(I - S_r)^{-1} \cdot (T(r,t) - T(\bar{r},t))v_o(r)\| +$$

$$+ \|(I - S_r)^{-1}(T(\bar{r},t)v_o(r) - T(\bar{r},t)v_o(\bar{r}))\| +$$

$$+ \left\| (I - S_r)^{-1}\int_0^t \Big[T(r,t-s)f_w(r,w(r,s)) - T(\bar{r},t-s)f_w(\bar{r},w(\bar{r},s))\Big]v(\bar{r},s)ds \right\|$$

usando agora a continuidade de $v_o(r)$ e a compacidade dos conjuntos $\{v_o(r) : -\eta \leq r \leq \eta\}$ e $\{v(\bar{r},s) : 0 \leq s \leq t_o\}$ temos que o lado direito da desigualdade anterior tende a zero uniformemente em t para $t \in [0,t_o]$ quando $r \to \bar{r}$, completando a demonstração. □

TEOREMA 1.5: *(Diferenciabilidade de Ponto Fixo, Dependendo de Parâmetro).*

Sejam X *e* Y *espaços de Banach,* $\Lambda \subset Y$ *aberto e*

$$F : \Lambda \times X \to X$$

satisfazendo:

i) $F(\cdot,x) : \Lambda \to X$ *contínua,* $x \in X$.

ii) $F(y,\cdot) : X \to X$ *contínua,* $y \in \Lambda$.

iii) *Para cada* $y \in \Lambda$, $F(y,\cdot)$ *tem um ponto fixo* $x^*(y)$ *que depende continuamente de* y.

iv) *Se* $\mathcal{F} = \{x^*(y) : y \in \Lambda\}$ *então* F *é diferenciável em relação a* y, *para* $(y,x) \in \Lambda \times \mathcal{F}$ *com*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\cdot,x^*(\cdot)) : \Lambda \to \mathcal{L}(Y,X)$$

contínua.

v) F *é diferenciável em relação a* x, *com*

$$\left(I - \frac{\partial F}{\partial x}(y_1, x^*(y_2))\right)$$

inversível, e com a inversa $\left(I - \frac{\partial F}{\partial x}(y_1, x^*(y_2))\right)^{-1}$ *uni formemente limitada e fortemente contínua em* y_1 *e* y_2; $y_1, y_2 \in \Lambda$. *Então* $y \to x^*(y)$ *é continuamente diferenciável em relação a* y *com*

$$\frac{dx^*(y)}{dy} = \left(I - \frac{\partial F}{\partial x}(y,x^*(y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(y, x^*(y)).$$

DEMONSTRAÇÃO: Para $y \in \Lambda$ e $h \in Y$ temos, para t suficientemente pequeno, que

$$x^*(y + th) - x^*(y) = F(y + th, x^*(y + th)) - F(y, x^*(y)) =$$

$$= F(y + th, x^*(y + th)) - F(y + th, x^*(y)) + F(y + th, x^*(y)) -$$

$$- F(y, x^*(y)) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(y + th, x^*(y)) \cdot [x^*(y + th) - x^*(y)] + o(\| x^*(y + th) - x^*(y) \|)$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial y}(y, x^*(y)) \cdot th + o(\| th \|)$$

e daí podemos escrever que

$$x^*(y + th) - x^*(y) = \left(I - \frac{\partial F}{\partial x}(y + th, x^*(y)) \right)^{-1} \cdot$$

$$\cdot\ o(\| x^*(y + th) - x^*(y) \|) + \left(I - \frac{\partial F}{\partial x}(y + th, x^*(y)) \right)^{-1}$$

$$\cdot \left[\frac{\partial F}{\partial y}(y, x^*(y)) \cdot th + o(\| th \|) \right]$$

e como

$$\left(I - \frac{\partial F}{\partial x}(y + th, x^*(y)) \right)^{-1} \cdot o(\| x^*(y + th) - x^*(y) \|) =$$

$$= o(\| x^*(y + th) - x^*(y) \|)$$

vem que

$$x^*(y + th) - x^*(y) - o(\| x^*(y + th) - x^*(y) \|) =$$

(1.7)

$$= \left(I - \frac{\partial F}{\partial x}(y + th, x^*(y)) \right)^{-1} \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial y}(y, x^*(y)) \cdot th + o(\| th \|) \right]$$

Mostraremos agora que

$$\frac{o(\| x^*(y + th) - x^*(y) \|)}{t} \to 0$$

quando $t \to 0$, para isto, basta mostrar que

$$\left\| \frac{x^*(y + th) - x^*(y)}{t} \right\|$$

é limitado, quando $t \to 0$. Temos que

$$\| x^*(y + th) - x^*(y) \| \leq \| x^*(y + th) - x^*(y) - o(\| x^*(y + th) - x^*(y) \|) \| +$$

$$+ \| o(\| x^*(y + th) - x^*(y) \|) \|$$

logo

$$\| x^*(y + th) - x^*(y) \| \leq 2 \| x^*(y + th) - x^*(y) - o(\| x^*(y + th) - x^*(y) \|) \|$$

para $|t| < t_o$, t_o suficientemente pequeno, pois

$$o(\| x^*(y + th) - x^*(y)\|) \leq \frac{1}{2} \| x^*(y + th) - x^*(y)\|$$

para $|t| < t_o$. Portanto usando a igualdade (1.7) obtemos que

$$\left\| \frac{x^*(y + th) - x^*(y)}{t} \right\| \leq$$

$$\leq 2 \left\| \left(I - \frac{\partial F}{\partial x} (y + th, x^*(y)) \right)^{-1} \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial y} (y, x^*(y)) \cdot h + \frac{o(\| th \|)}{|t|} \right] \right\|$$

que é limitado, quando $t \to 0$. Temos portanto da igualdade (1.7) que

$$\lim_{t \to o} \frac{x^*(y + th) - x^*(y)}{t} =$$

$$= \left(I - \frac{\partial F}{\partial x} (y, x^*(y)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} (y, x^*(y)) \cdot h$$

e ainda mais, como

$$y \longmapsto \left(I - \frac{\partial F}{\partial x} (y, x^*(y)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} (y, x^*(y)) \in \mathcal{L}(Y, X)$$

é contínua, podemos afirmar que $x^*(y)$ é continuamente diferenciável com

$$\frac{dx^*(y)}{dy} = \left(I - \frac{\partial F}{\partial x}(y, x^*(y)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(y, x^*(y))$$

completando a demonstração. □

TEOREMA 1.6: *Se* $w_o(r) \in \mathcal{D}$, $A(r)w_o(r)$ *é contínua e* $w_o(r)$ *é continuamente diferenciável para* $r \in [-\eta,\eta]$; $f(r,w)$ *é continuamente diferenciável e possui derivadas mistas contínuas; e* $w^*(r,t)$ *é uma solução "mild" de (1.5), contínua em* r *e* t *para* $r \in [-\eta,\eta]$ *e* $t \in [0,t_o]$, *então* $w^*(r,t)$ *é continuamente diferenciável nas duas variáveis* r *e* t *com*

$$\frac{\partial w^*(r,t)}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial w^*(\bar{r},t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w^*(r,t)}{\partial r} \longrightarrow \frac{\partial w^*(\bar{r},t)}{\partial r}$$

quando $r \to \bar{r}$, *uniformemente em* t, *para* $t \in [0,t_o]$.

DEMONSTRAÇÃO: O Teorema 1.4 garante a diferenciabilidade e a continuidade da derivada de $w^*(r,t)$ em relação a t. Para a diferenciabilidade em relação ao parâmetro r, consideremos o operador

$$F : [-\eta,\eta] \times C([0, t_o]) \to C([0,t_o])$$

dado por

$$F(r,w)(t) = T(r,t)w_o(r) + \int_o^t T(r,t-s)f(r,w(s))ds$$

temos que F é contínua em cada variável, $w^*(r,\cdot)$ é ponto fixo de $F(r,\cdot)$, F é diferenciável em relação a w com

$$\frac{\partial F}{\partial w}(r,w)\cdot u(t) = \int_o^t T(r,t-s)f_w(r,w(s))u(s)ds$$

logo

$$\frac{\partial F}{\partial w}(r_1,w^*(r_2,\cdot))u(t) = \int_o^t T(r_1,t-s)f_w(r_1,w^*(r_2,s))\cdot u(s)ds .$$

e o núcleo $T(r_1,t)f_w(r_1,w^*(r_2,s))$ é uniformemente limitado para $-\eta \leq r_1$, $r_2 \leq \eta$ e $0 \leq t$, $s \leq t_o$. Portanto a inversa

$$\left(I - \frac{\partial F}{\partial w}(r_1, w^*(r_2, \cdot))\right)^{-1}$$

existe e é fortemente contínua em r_1 e r_2. Daí para aplicarmos o Teorema 1.5, temos que analisar a diferenciabilidade de F em relação ao parâmetro r, para $(r,w) \in [-\eta,\eta] \times \mathcal{F}$, onde

$$\mathcal{F} = \{w^*(r,\cdot) : r \in [-\eta,\eta]\}$$

para isto temos que, w é continuamente diferenciável, e podemos escrever que

$$F(r,w)(t) = T(r,t)w_o(r) + \int_o^t T(r,t-s)f(r,w(s))ds =$$

$$= T(r,t)w_o(r) + \int_o^t T(r,t-s)A(r)A^{-1}(r)f(r,w(s))ds =$$

$$= T(r,t)w_o(r) - \int_o^t \frac{dT(r,t-s)}{ds} \cdot A^{-1}(r)f(r,w(s))ds =$$

$$= T(r,t)w_o(r) + T(r,t)A^{-1}(r)f(r,w(0)) - A^{-1}(r)f(r,w(t))$$

$$+ \int_o^t T(r,t-s)A^{-1}(r)f_w(r,w(s)) \cdot \dot{w}(s)ds$$

logo $F(r,w)$ é diferenciável em relação a r para $(r,w) \in [-\eta,\eta] \times F$, pelo Corolário 1.1, e ainda mais

$$\frac{\partial F}{\partial r}\left(r,\ w^*(r,\ \cdot\ )\right)$$

é contínua em r, portanto, pelo Teorema 1.5, temos que

$$r \longmapsto w^*(r,\ \cdot\ )$$

é continuamente diferenciável em relação ao parâmetro r, completando a demonstração. □

2. BIFURCAÇÃO DE HOPF

Nosso objetivo neste parágrafo é obter uma versão do teorema de Bifurcação de Hopf para a equação diferencial ordinária perturbada em W

$$(2.1) \qquad \frac{dv}{ds} = A(r)v(s) + f(r,v(s)) \qquad (s > 0)$$

onde W é um Espaço de Banach real, A(r) satisfaz as hipóteses HA-1, 2, mais a seguinte hipótese de decomposição do espaço:

(HA-3) *Para cada* $r \in [-\eta,\eta]$ *o espaço* W *pode ser decomposto com soma direta de* X_r *com* Y_r

$$W = X_r \oplus Y_r$$

com projeções sobre X_r *e* Y_r, *fortemente continuamente diferenciáveis em relação a* r, *com* X_r *e* Y_r *invariantes em relação à* A(r) *e ainda mais*

$$\|T(r,t)x\| \leq M_1 e^{-\alpha t} \|x\|$$

para todo $x \in X_r$ *e* $t \geq 0$, *onde* $M_1 \geq 1$ *e* $\alpha > 0$ *são constantes que independem de* r. Y_r *é um sub-espaço de dimensão* 2 *de* W, *com uma base* $\{e_1(r),\ e_2(r)\}$, *em relação a qual a matriz da restrição de* A(r) *a* Y_r *é*

$$[A(r)] = \begin{pmatrix} \alpha(r) & \beta(r) \\ & \\ -\beta(r) & \alpha(r) \end{pmatrix}$$

com $\alpha(r)$ *e* $\beta(r)$ *continuamente diferenciáveis e satisfazendo:*

i) $\alpha(0) = 0, \quad \beta(0) = v_o$

ii) $\beta(r) \neq 0, \quad r \in [-\eta,\eta]$

iii) $\alpha'(0) \neq 0$ *(Hipótese de Hopf).*

A função $f : [-\eta,\eta] \times W \to W$, com componentes F_{X_r} e f_{Y_r} em relação à decomposição em soma direta citada em (HA-3)

$$f(r,w) = f_{X_r}(r,w) + f_{Y_r}(r,w) \in X_r \oplus Y_r$$

satisfaz:

(Hf-1) f *possui derivadas contínuas até a segunda ordem em relação a* r *e* w.

(Hf-2) $f(r,0) = 0, \qquad r \in [-\eta,\eta]$

(Hf-3) $\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) = 0$ *e* $\frac{\partial f_{Y_r}}{\partial w}(r,0)/_{Y_r} = 0, \qquad r \in [-\eta,\eta]$

(Hf-4) *Existem* $L > 0$ *e* $\delta_o > 0$, *tais que*

$$\left\| \frac{\partial f_{X_r}}{\partial w}(r,w_1)w - \frac{\partial f_{X_r}}{\partial w}(r,w_2)w \right\| \leq L \|w_1 - w_2\| \|w\|$$

onde $w \in W$ *e* $|r| \leq \eta$, $\|w_i\| \leq 2\delta_o$, $i = 1,2$.

Dentro dessas hipóteses estamos interessados nas possíveis soluções periódicas da equação (2.1), como esta equação é autônoma, não conhecemos as priori o período de tais soluções, introduziremos então um novo parâmetro p na equação, relativo ao período, colocando

$$s = (1 + p)t, \qquad p > -1$$

(2.2)

$$w(t) = v((1 + p)t)$$

com essa mudança de variável (2.1) fica equivalente a

$$\dot{w}(t) = (1 + p)A(r)w(t) + (1 + p)f(r,w(t)) \tag{2.3}$$

onde o ponto indica derivação em relação a t.

Observe que a cada solução w-periódica de (2.3) temos em correspondência, através da mudança de variável (2.2), uma solução

$(1+p)w$-periódica de (2.3). Nosso procedimento então será o de buscar soluções de (2.3) w_o-periódicas para um w_o conveniente.

Com relação à decomposição em soma direta e à base $\{e_1(r), e_1(r)\}$ dadas em (HA-3), fixaremos algumas notações:

1. $x(r,t)$ e $y(r,t)$ para indicar as projeções de $w(t) \in W$ em X_r e Y_r respectivamente, de modo que

$$w(t) = x(r,t) + y(r,t) \in X_r \oplus Y_r .$$

2. $$\begin{pmatrix} y_1(r,t) \\ y_2(r,t) \end{pmatrix}$$

para indicar as coordenadas de $y(r,t)$ em relação à base $\{e_1(r), e_2(r)\}$, identificando portanto $y(r,t)$ com

$$\begin{pmatrix} y_1(r,t) \\ y_2(r,t) \end{pmatrix} ,$$

identificação esta que será usada até o final deste capítulo.

3. Da mesma maneira que em 2.,

$$\begin{pmatrix} f^1_{Y_r}(r,w(t)) \\ f^2_{Y_r}(r,w(t)) \end{pmatrix}$$

indica as coordenadas de $f_{Y_r}(r, w(t))$ em relação à base $\{e_1(r), e_2(r)\}$.

Nessas condições a equação (2.3) é equivalente às equações abaixo em X_r e Y_r

$$\begin{aligned} \dot{x}(r,t) &= (1+p)A(r)x(r,t) + (1+p)f_{X_r}(r,w(t)) \\ \text{(2.4)} \qquad & \\ \dot{y}(r,t) &= (1+p)A(r)y(r,t) + (1+p)f_{Y_r}(r,w(t)) \end{aligned}$$

em coordenadas a segunda equação de (2.4) fica

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(r,t) \\ \\ \dot{y}_2(r,t) \end{pmatrix} = (1+p)[A(r)] \begin{pmatrix} y_1(r,t) \\ \\ y_2(r,t) \end{pmatrix} + (1+p) \begin{pmatrix} f^1_{Y_r}(r,w(t)) \\ \\ f^2_{Y_r}(r,w(t)) \end{pmatrix}$$

Trabalharemos com essa equação na seguinte forma

$$\text{(2.5)} \qquad \begin{pmatrix} \dot{y}_1(r,t) \\ \\ \dot{y}_2(r,t) \end{pmatrix} = [A(0)] \begin{pmatrix} y_1(r,t) \\ \\ y_2(r,t) \end{pmatrix} + g(r,p,w(t))$$

onde

$$g(r,\cdot,\cdot) : (-1,\infty) \times W \to Y_r \, ; \qquad |r| \le \eta$$

é dada, em coordenadas, por

$$g(r,p,w) = \begin{pmatrix} g_1(r,p,w) \\ \\ g_2(r,p,w) \end{pmatrix} =$$

$$= (1+p)\left\{ [A(r)] \begin{pmatrix} y_1(r) \\ \\ y_2(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f^1_{Y_r}(r,w) \\ \\ f^2_{Y_r}(r,w) \end{pmatrix} \right\} - [A(0)] \begin{pmatrix} y_1(r) \\ \\ y_2(r) \end{pmatrix}$$

onde $w = x(r) + y(r) \in X_r \oplus Y_r$ e $\begin{matrix} y_1(r) \\ y_2(r) \end{matrix}$ são as coordenadas de $y(r)$ em relação à base $\{e_1(r), e_2(r)\}$. Temos que g possui as seguintes propriedades:

a) $g(r,p,0) = 0$; $|r| \leq \eta$ e $p > -1$.

b) g é continuamente diferenciável em todas as variáveis, com

(2.6) $\frac{\partial g}{\partial w}(r,p,w)$ também continuamente diferenciável em todas as variáveis, e $\frac{\partial g}{\partial w}(0,0,0) = 0$.

Dado um espaço de Banach $\mathbb{E}$, denotaremos por $P_{w_o}(\mathbb{E})$ o espaço das funções contínuas, w_o-periódicas, definidas em $\mathbb{R}_+$ e com valores em $\mathbb{E}$, equipado com a norma do supremo.

Usaremos as *notações e os resultados* dados em Hale [5] pag. 263, no nosso caso, obtendo que:

i) a matriz $\phi(t)$ cujas colunas formam uma base para as soluçoes $w_o = \frac{2\pi}{v_o}$ - periódicas de

$$(2.7) \qquad \dot{x} = [A(0)]x$$

é a matriz principal do sistema, isto é,

$$\phi(t) = e^{[A(0)]t} = \begin{bmatrix} \cos(v_o t) & \text{sen}(v_o t) \\ -\text{sen}(v_o t) & \cos(v_o t) \end{bmatrix}$$

ii) a matriz $\psi(t)$ cujas linhas formam uma base para as soluções w_o - periódicas da equação adjunta

$$(2.8) \qquad \dot{x} = -x[A(0)]$$

é

$\psi(t) = e^{-[A(0)]t} = \phi'(t)$ (' *denota transporta*)

logo, temos que $C = D = w_o I$ (I = matriz identidade), e finalmente que as projeções P e Q que projetam $P_{w_o}(\mathbb{R}^2)$ respectivamente sobre o sub-espaço de $P_{w_o}(\mathbb{R}^2)$ gerado pelas soluções de (2.7) e sobre o sub-espaço de $P_{w_o}(\mathbb{R}^2)$ gerado pela transposta das soluções de equação adjunta (2.8) também são iguais e dadas por:

$$Ph = Qh = \phi(\cdot)b$$

onde

$$b = \frac{1}{w_o} \int_o^{w_o} \psi(t)h(t)dt$$

iii) se $h \in P_{w_o}(\mathbb{R}^2)$ e $Qh = 0$, então existe uma única solução da equação

$$\dot{x} = [A(0)]\, x + h(t)$$

w_o-periódica Kh, tal que $PKh = 0$ e ainda mais $K(I-Q)$ é um operador linear contínuo de $P_{w_o}(\mathbb{R}^2)$ em $P_{w_o}(\mathbb{R}^2)$.

Nessas condições se o sistema (2.4) tiver uma solução $w(t)$, w_o-periódica, devemos ter, usadó a forma (2.5), que

$$\begin{cases} (I - Q)(\dot{y}(r,\cdot) - [A(0)]y(r,\cdot)) = (I - Q)(g(r,p,w(\cdot))) \\ (Q(\dot{y}(r,\cdot) - [A(0)]\,y(r,\cdot)) = Q(g(r,p,w(\cdot))) \end{cases}$$

mas

$$Q(\dot{y}(r,\cdot) - [A(0)]\,y(r,\cdot)) = \phi\, \frac{1}{w_o} \int_o^{w_o} (\psi(t)\dot{y}(r,t) - \psi(t)[A(0)]y(r,t))dt =$$

$$= \phi\, \frac{1}{w_o} \int_o^{w_o} (\psi(t)\,\dot{y}(r,t) + \dot{\psi}(t)\,y(r,t))\,dt = \phi\, \frac{1}{w_o} \Big[\psi(t)\,y(r,t) \Big]_o^{w_o} = 0$$

logo

$$\begin{cases} \dot{y}(r,\cdot) = [A(0)]y(r,\cdot) + (I - Q) \cdot g(r,p,w(\cdot)) \\ \\ Q(g(r,p,w(\cdot))) = 0 \qquad\qquad \text{(Equação de bifurcação)} \end{cases}$$

Como o sistema é autônomo, existe a, tal que

$$(2.9) \qquad y(r,t) = \phi(t)\binom{a}{o} + K(I - Q) \cdot g(r,p,w(t)).$$

Por outro lado, usando a primeira equação de (2.4), podemos escrever que

$$(2.10) \qquad x(r,t) = T(r,(1+p)t)x_o +$$

$$+ \int_o^t T(r,(1+p)(t-s)).(1+p)f_{X_r}(r,w(s))ds$$

onde x_o deve satisfazer

$$x_o = T(r,(1+p)w_o)x_o + \int_o^{w_o} T(r,(1+p)(w_o - s)).(1+p)f_{X_r}(r,w(s))ds.$$

Como em X_r temos a estimativa de decaimento exponencial para o Semi-Grupo

$$\|T(r,t)x\| \leq M_1 e^{-\alpha t}\|x\|, \qquad x \in X_r$$

obtemos que

$$(2.11) \quad x_o = x_o(r,p,w(\cdot)) =$$

$$= (I - T(r,(1+p)w_o))^{-1}\int_o^{w_o} T(r,(1+p)(w_o - s)).(1+p)f_{X_r}(r,w(s))ds$$

daí, com base nas igualdades (2.9) e (2.10), definimos o seguinte operador:

$$F : \mathbb{R} \times [-\eta,\eta] \times (-1,\infty) \times P_{w_o}(W) \to P_{w_o}(W)$$

por

$$F(a,r,p,w)(t) = w(t) - T(r,(1+p)t)x_o(r,p,w) -$$

$$- \int_o^t T(r,(1+p)(t-s)).(1+p)f_{X_r}(r,w(s))ds -$$

$$- \phi(t)\binom{a}{o} - K(I-Q)g(r,p,w(t))$$

onde $x_o(r,p,w)$ é dado por (2.11). Observe que o operador F esta bem definido, isto é, $F(a,r,p,\cdot)$ aplica $P_{w_o}(W)$ em $P_{w_o}(W)$.

LEMA 2.1: *Com as hipóteses* (HA-1, 2, 3) *e* (Hf-1, 2, 3, 4) *existem constantes possitivas* a_o, r_o *e* p_o *e uma função* $w^*(a,r,p)$ *definida para* $|a| \leq a_o$, $|r| \leq r_o$ *e* $|p| \leq p_o$ *e com valores em*

$P_{w_o}(W)$ *tais que:*

i) $F(a,r,p,w^*(a,r,p)) = 0$

ii) w^* *é contínua*

iii) w^* *é continuamente diferenciável em relação a* a

iv) $w^*(0,r,p) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Temos que F é contínua, continuamente diferenciável nas variáveis a e w, $F(0,0,0,0)=0$ e $\frac{\partial F}{\partial w}(0,0,0,0) = I_{P_{w_o}(W)}$, portanto o Teorema das Funções Implícitas garante a existência das constantes a_o, r_o, p_o e da função w^* satisfazendo as condições do lema, sendo que o item iv) decorre da unicidade do Teorema das Funções Implícitas e do fato que $F(0,r,p,0) = 0$.

LEMA 2.2: *Com as hipóteses* (HA-1, 2, 3), (Hf-1, 2, 3, 4) *e diminuindo se necessário as constantes* a_o, r_o *e* p_o *dados no Lema 2.1, temos que* $w^*(a,r,p)(t)$ *é continuamente diferenciável em relação a* t.

DEMONSTRAÇÃO: Temos que

$$w^*(a,r,p)(t) = x^*(a,r,p)(t) + y^*(a,r,p(t) \in X_r \oplus Y_r$$

onde

$$x^*(a,r,p)(t) = T(r,(1+p)t)x_o(r,p,w^*(a,r,p)) +$$

$$(1+p)\int_o^t T(r,(1+p)(t-s))f_{X_r}(r,w^*(a,r,p)(s))ds$$

e

$$y^*(a,r,p)(t) = \phi(t)\binom{a}{o} + K(I-Q)\cdot g(r,p,w^*(a,r,p)(t))$$

logo $y^*(a,r,p)(t)$ é continuamente diferenciável em relação a t, temos portanto que analisar a diferenciabilidade de $x^*(a,r,p)(t)$ em relação a t e faremos isto aproximando $x^*(a,r,p)(t)$ por uma sequência $x_n^*(a,r,p)(t)$ de funções continuamente diferenciáveis em relação a t. Começaremos definindo o operador

$$S_{a,r,p} : P_{w_o}(X_r) \to P_{w_o}(X_r)$$

por

$$S_{a,r,p}(x)(t) = T(r,(1+p)t)x_o(r,p,x+y^*(a,r,p)) +$$

$$+ (1+p)\int_o^t T(r,(1+p)(t-s))f_{X_r}(r,x(s) + y^*(a,r,p)(s))ds$$

temos que $S_{a,r,p}$ está bem definido e como $\frac{\partial f_{X_r}}{\partial w}(r,w)$, $y^*(a,r,p)$ são contínuas e $f_{X_r}(r,0) = 0$, $\frac{\partial f_{X_r}}{\partial w}(0,0) = 0$, $y^*(0,0,0)=0$, então existem constantes positivas a_o, r_o, p_o e ε_o, onde tomamos $0 < \varepsilon_o < \delta_o$ (δ_o é dado na hipótese Hf-4) tais que:

$$\left\| \frac{\partial f_{X_r}}{\partial w} (r,w_1) \cdot w \right\| \leq \frac{\alpha}{4 M_1^3} \|w\|$$

$$\|f_{X_r}(r,w_1)\| \leq \frac{\alpha}{4 M_1^3} \|w_1\| \qquad (2.12)$$

$$\|y^*(a,r,p)\|_{P_{w_o}(W)} \leq \varepsilon_o$$

se $|a| \leq a_o$, $|r| \leq r_o$, $|p| \leq p_o$, $\|w_1\| \leq 2\varepsilon_o$ e $w \in W$. Nessas condições, podemos afirmar que a restrição de $S_{a,r,p}$, para $|a| \leq a_o$, $|r| \leq r_o$ e $|p| \leq p_o$, à bola fechada $\overline{B_{\varepsilon_o}}$, de centro na origem e raio ε_o, é um operador de $\overline{B_{\varepsilon_o}}$ em $\overline{B_{\varepsilon_o}}$, que satisfaz

$$\|S_{a,r,p}(x_1) - S_{a,r,p}(x_2)\|_{P_{w_o}(W)} \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_{P_{w_o}(W)} \qquad (2.13)$$

para x_1 e x_2 em $\overline{B_{\varepsilon_o}}$. Para a justificativa veja os calculos abaixo. Se $x \in \overline{B_{\varepsilon_o}}$ temos que

$$\| x_o(r,p,x + y^*(a,r,p)\| \le$$

$$\le \frac{M_1(1+p)}{1-e^{-\alpha(1+p)w_o}} \int_o^{w_o} M_1 e^{-\alpha(1+p)(w_o - s)} \left\| f_{X_r}(r,x(s) + y^*(a,r,p)) \right\| ds$$

$$\le \frac{M_1^2(1+p)}{1-e^{-\alpha(1+p)w_o}} \cdot \frac{\alpha}{4M_1^3} \left\| x + y^*(a,r,p) \right\|_{P_{w_o}(W)} \left[\frac{1-e^{-\alpha(1+p)w_o}}{\alpha(1+p)} \right] \le$$

$$\le \frac{1}{2M_1} \varepsilon_o$$

portanto

$$\| S_{a,r,p}(x)(t)\| \le \| T(r,(1+p)t)x_o(r,p,x + y^*(a,r,p))\| +$$

$$+ (1+p)\int_o^t \| T(r,(1+p)(t-s))f_{X_r}(r,x(s) + y^*(a,r,p)(s)\| ds \le$$

$$\le M_1 e^{-\alpha(1+p)t} \frac{\varepsilon_o}{2M_1} + \frac{1-e^{-\alpha(1+p)t}}{4M_1^2} 2\varepsilon_o \le \varepsilon_o .$$

A desigualdade (2.13) segue através de cálculos semelhantes. Temos portanto, que $S_{a,r,p}$ para $|a| \le a_o$, $|r| \le r_o$ e $|p| \le p_o$, é uma contração de $\overline{B_{\varepsilon_o}}$ em $\overline{B_{\varepsilon_o}}$ cujo único ponto fixo é $x^*(a,r,p)$, logo

$$\| x^*(a,r,p) \|_{P_{w_o}(W)} \leq \varepsilon_o; \quad |a| \leq a_o , \quad |r| \leq r_o , \quad |p| \leq p_o$$

e $x^*(a,r,p)$ é aproximada pela sequência $(x_n^*(a,r,p))$ onde

$$x_o^*(a,r,p) = 0$$

$$x_{n+1}^*(a,r,p) = S_{a,r,p}(x_n^*(a,r,p)) \quad n = 0,1,2,\ldots$$

portanto, temos por recorrência que $x_n^*(a,r,p)(t)$ é contínua em todas as variáveis e continuamente diferenciável em relação a t com

$$\dot{x}_{n+1}^*(a,r,p)(t) =$$

$$= T(r,(1+p)(t)\Big(I - T(r,(1+p)w_o)\Big)^{-1}(1+p)\int_o^{w_o} T(r,(1+p)(w_o - s)) \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial f_{X_r}}{\partial w}\Big(r, x_n^*(a,r,p)(s) + y^*(a,r,p)(s)\Big) \cdot$$

$$(2.14) \quad \cdot \Big(\dot{x}_n^*(a,r,p)(s) + \dot{y}^*(a,r,p)(s)\Big) ds + (1+p)\int_o^t T(r,(1+p)(t-s)) \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial f_{X_r}}{\partial w}\Big(r, x_n^*(a,r,p)(s) + y^*(a,r,p)(s)\Big) \cdot$$

$$\cdot \Big(\dot{x}_n^*(a,r,p)(s) + \dot{y}^*(a,r,p)(s)\Big) ds.$$

segue daí que

$$\| \dot{x}^*_{n+1}(a,r,p) \|_{P_{w_o}(W)} \leq \frac{1}{2} \| \dot{x}^*_n(a,r,p) \|_{P_{w_o}(W)} + \frac{1}{2} \| \dot{y}^*(a,r,p) \|_{P_{w_o}(W)}$$

$n = 0,1,2,\ldots,$ portanto

$$\| \dot{x}^*_{n+1}(a,r,p) \|_{P_{w_o}(W)} \leq \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2} \right) \| \dot{y}^*(a,r,p) \|_{P_{w_o}(W)}$$

logo

$$\| x^*_{n+1}(a,r,p) \|_{P_{w_o}(W)} \leq \| y^*(a,r,p) \|_{P_{w_o}(W)} \; ; \quad n = 0,1,2,\ldots$$

e ainda mais, usando a hipótese (Hf-4), podemos mostrar, para $n = 0,1,2,\ldots,$ que

$$\| \dot{x}^*_{n+1}(a,r,p)(t) - \dot{x}^*_n(a,r,p)(t) \| \leq$$

$$\leq L_1 \| x^*_n(a,r,p) - x^*_{n-1}(a,r,p) \|_{P_{w_o}(W)} + \frac{1}{2} \| \dot{x}^*_n(a,r,p) - \dot{x}^*_{n+1}(a,r,p) \|_{P_{w_o}(W)}$$

$$\leq \frac{L_1}{2^{n-1}} \| x^*_1(a,r,p) \|_{P_{w_o}(W)} + \frac{1}{2} \| \dot{x}^*_n(a,r,p) - \dot{x}^*_{n-1}(a,r,p) \|_{P_{w_o}(W)}$$

onde L_1 é uma constante que independe de a, r, p e t se $|a| \leq a_o$, $|r| \leq r_o$, $|p| \leq p_o$ e $t \geq 0$, temos portanto que

$$\| \dot{x}^*_{n+1}(a,r,p)(t) - \dot{x}^*_n(a,r,p)(t) \| \leq$$

$$\leq \frac{n}{2^{n-1}} L_1 \| x^*_1(a,r,p) \|_{P_{w_o}(W)} + \frac{1}{2^n} \| \dot{x}^*_1(a,r,p) \|_{P_{w_o}(W)}$$

logo $\dot{x}^*_n(a,r,p)(t)$ converge, quando $n \to \infty$, uniformemente em relação a a, r, p e t, se $|a| \leq a_o$, $|r| \leq r_o$, $|p| \leq p_o$ e $t \geq 0$, então

$$x^*(a,r,p) = \lim_{n \to \infty} x^*_n(a,r,p) \qquad \text{em} \qquad P_{w_o}(W)$$

é continuamente diferenciável em relação a t com

$$\dot{x}^*(a,r,p)(t) = \lim_{n \to \infty} \dot{x}^*_n(a,r,p)(t)$$

completando a demonstração. □

LEMA 2.3: *Com as hipóteses* (HA-1, 2, 3) *e* (Hf-1, 2, 3, 4) *temos que* $w^*(a,r,p)(t)$ *é continuamente diferenciável em todas as variáveis, para* $|a| \leq a_o$, $|r| \leq r_o$, $|p| \leq p_o$ *e* $t \geq 0$, *onde* a_o, r_o *e* p_o *são constante positivas convenientes.*

DEMONSTRAÇÃO: A diferenciabilidade em relação a a e a t decorrem respectivamente dos Lemas 2.1 e 2.2. A diferenciabilidade em relação a r e p será feita via Teorema 1.5 (Diferenciabilidade de ponto fixo dependendo de parâmetro). Temos que $w^*(a,r,p)$

é ponto fixo do operador dado por

$$E(a,r,p,w)(t) = w(t) - F(a,r,p,w)(t) =$$

$$= T(r,(1+p)t)x_o(r,p,w) + \int_o^t T(r,(1+p)(t-s)).(1+p)f_{X_r}(r,w(s))ds +$$

$$+ \phi(t)\binom{a}{o} + K(I-Q)\cdot g(r,p,w(t)).$$

onde $x_o(r,p,w)$ é dado por (2.11), isto é,

$$x_o(r,p,w) =$$

$$= \left(I - T(r,(1+p)w_o)\right)^{-1} \int_o^{w_o} T(r,(1+p)(w_o-s)).(1+p)f_{X_r}(r,w(s))ds.$$

Seja

$$F = \{w^*(a,r,p) \;/\; |a| \le a_o\,,\ |r| \le r_o \ \text{ e } \ |p| \le p_o\}$$

para $w^* \in F$, temos que $w^*(t)$ é continuamente diferenciável, logo colocando

$$\varphi(r,p,t) = \int_o^t T(r,(1+p)(t-s)).(1+p)f_{X_r}(r,w^*(s))ds =$$

$$= \int_o^{(1+p)t} T(r.s)f_{X_r}(r,w^*(t - \frac{s}{1+p}))ds$$

temos que $\varphi(r,p,t)$ também é continuamente diferenciável em relação a t, pertence a $\mathcal{D}$ e satisfaz

$$\dot{\varphi}(r,p,t) = (1 + p)A(r)\varphi(r,p,t) + (1 + p)f_{X_r}(r,w^*(t))$$

portanto, segue daí que

$$x_o(r,p,w^*) = \left(I - T(r,(1 + p)w_o)\right)^{-1}\varphi(r,p,w_o)$$

também pertence a $\mathcal{D}$, pois $(I - T(r,(1 + p)w_o))^{-1}$ preserva o dominio $\mathcal{D}$ e ainda mais, como

$$\varphi(r,p,t) = \int_o^t T(r,(1+p)(t-s)).(1+p)A(r)A^{-1}(r)f_{X_r}(r,w^*(s))ds =$$

$$= - \int_o^t \frac{dT(r,(1+p)(t-s))}{ds} \; A^{-1}(r)f_{X_r}(r,w^*(s))ds$$

temos, integrando por partes, que

$$\varphi(r,p,t) =$$

$$= T(r,(1+p)t)A^{-1}(r)f_{X_r}(r,w^*(0)) - A^{-1}(r)f_{X_r}(r,w^*(t))$$

$$+ \int_o^t T(r,(1+p)(t-s))A^{-1}(r)\frac{\partial f_{X_r}}{\partial w}(r,w^*(s)) \cdot \dot{w}^*(s)ds$$

logo $\varphi(r,p,t)$ também é continuamente diferenciável em relação a r e p, portanto o operador E é diferenciável em relação aos parâmetros r e p e satisfaz as condições do Teorema 1.5, completando assim a demonstração. □

Estamos agora preparados para justificar a seguinte versão do Teorema de Bifurcação de Hopf.

TEOREMA 2.1 (Bifurcação de Hopf): *Se* $A(r)$ *e* $f(r,w)$ *satisfazem as hipóteses* (HA-1, 2, 3) *e* (Hf-1, 2, 3, 4) *respectivamente, então existem constantes positivas* α_o, β_o, γ_o, *uma função* $r^*(a)$, $|a| < \alpha_o$ *e uma família*

$$\{v^*(a) \ : \ |a| < \alpha_o\}$$

de soluções periódicas da equação

$$\frac{dv^*(a)}{ds}(s) = A(r^*(a))\, v^*(a)(s) + f(r^*(a),\ v^*(a)(s)); \qquad s > 0$$

com período $P(a)$ *onde:*

i) $v^*(a)$, $r^*(a)$ *e* $P(a)$ *são continuamente diferenciáveis para* $|a| < \alpha_o$

ii) $\frac{dr^*}{da}(0) = \frac{dx^*}{da}(0) = 0$, *onde* $x^*(a)$ *é a componente de* $v^*(a)$ *segundo* $X_{r^*(a)}$ *da decomposição em soma direta de* W.

iii) $P(0) = w_o = \frac{2\pi}{v_o}$ *e* $|P(a) - w_o| \leq \gamma_o$, $|a| < \alpha_o$

iv) $v^*(0) = 0$, $v^*(a) \neq 0$ *se* $0 < |a| < \alpha_o$ *e*

$$\|v^*(a)\|_{P_{P(a)}(W)} \leq \beta_o$$

v) *A menos de translação no tempo, toda solução* v(s), *w-periódica de* $v'(s) = A(r)v(s) + f(r,v(s))$, $s > 0$ *com* $|w - w_o| \leq \gamma_o$ *e* $\|v\|_{P_w(W)} \leq \beta_o$ *pertence à família acima.*

DEMONSTRAÇÃO: Temos que $w^*(a,r,p)$ dada no Lema 2.3 satisfaz

$$\dot{w}(a,r,p)(t) = (1 + p)A(r)w(a,r,p)(t) + (1 + p)f(r,w^*(a,r,p)(t))$$

$$- Q \cdot g(r,p,w^*(a,r,p)(t))$$

portanto basta resolver

$$Q \cdot g(r,p,w^*(a,r,p)(t)) = 0$$

para p e r como função de a. Como isto não pode ser feito *diretamente* via Teorema das Funções Implícitas, pois

$$Q \cdot g(r,p,w^*(0,r,p)) = 0 \quad r < |r_o| \quad e \quad |p| < p_o$$

visto que $g(r,p,0) = 0$ e $w^*(0,r,p) = 0$, resolveremos então

$$G(a,r,p) = 0$$

onde

$$G(a,r,p) = \begin{cases} Q \cdot \dfrac{\partial g}{\partial w}(r,p.0) \cdot \dfrac{\partial w^*}{\partial a}(0,r,p); \; |r| < r_o \;\text{ e }\; |p| < p_o \\ \\ \dfrac{1}{a}\, Q \cdot g(r,p,w^*(a,r,p)); \quad 0 < |a| < a_o,\, |r| < r_o \;\text{ e }\; |p| < p_o \end{cases}$$

temos que G é continuamente diferenciável e como

$$w^*(a,r,p) = x^*(a,r,p) + y^*(a,r,p) \in X_r \oplus Y_r$$

com

$$y^*(a,r,p) = \begin{pmatrix} y_1^*(a,r,p) \\ \\ y_2^*(a,r,p) \end{pmatrix}$$

em relação à base $\{e_1(r), e_2(r)\}$, não é difícil verificar que:

$$G(0,0,p) = p\, Q[A(0)] \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1^*}{\partial a}(0,0,p) \\ \\ \dfrac{\partial y_2^*}{\partial a}(0,0,p) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial G}{\partial p}(0,0,0)(t) = \phi(t)\begin{pmatrix} 0 \\ -v_o \end{pmatrix}$$

$$G(0,r,0) = Q\left\{ [A(r)]\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1^*}{\partial a}(0,r,0) \\ \\ \dfrac{\partial y_2^*}{\partial a}(0,r,0) \end{pmatrix} + \frac{\partial f_{Y_r}}{\partial w}(r,0)\cdot\frac{\partial w^*}{\partial a}(0,r,0) - \right.$$

$$\left. - \; [A(0)]\begin{pmatrix} y_1^*(0,r,0) \\ \\ y_2^*(0,r,0) \end{pmatrix} \right\}$$

$$\frac{\partial G}{\partial r}(0,0,0)(t) = \phi(t)\begin{pmatrix} \alpha'(0) \\ -\beta'(0) \end{pmatrix}$$

sendo que na última igualdade usamos que

$$\frac{\partial f_{Y_r}}{\partial w}(r,0)\Big/_{Y_r} = 0$$

dado pela hipótese (Hf-3), portanto

$$\det\left[\frac{\partial G(0,0,0)}{\partial(r,p)}\right] = \det\begin{bmatrix} 0 & \alpha'(0) \\ -v_o & -\beta'(0) \end{bmatrix} = v_o\alpha'(0) \neq 0$$

pela hipótese de Hopf dada em (HA-3) e daí pelo Teorema das Funções Implícitas existe α_o e funções $r^*(a)$ e $p^*(a)$ definidas para $|a| < \alpha_o$ tais que:

$$G(a, r^*(a), p^*(a)) = 0$$

$$r^*(0) = 0$$

$$p^*(0) = 0$$

r^* e p^* são continuamente diferenciáveis

$$\frac{dr^*}{da}(0) = \frac{dp^*}{da}(0) = 0, \text{ pois } \frac{\partial G}{\partial a}(0,0,0) = 0.$$

Finalmente colocando

$$v^*(a)(s) = w^*(a, r^*(a), p^*(a))\left(\frac{s}{1 + p^*(a)}\right); \quad |a| < \alpha_o$$

temos que $v^*(a)$ é solução periódica da equação dada com período $P(a) = (1 + p^*(a))w_o$, completando a demonstração do teorema. □

BIBLIOGRAFIA

[1] BRAYTON, R. K.; Bifurcation of periodic solutions in a non-linear difference - differential equation of neutral type. Quart. J. Appl. Math., 24(1966), 215 - 224.

[2] BRAYTON, R. K.; Non-linear oscillations in a distributed network, Quart. J. Appl. Math., 24(1967), 289 - 301.

[3] CRANDALL, M. G. & RABINOWITZ, P. H.; The Hopf Bifurcation Theorem in Infinite Dimensions, Arch. Rat. Mech. and An. (1977), 53 - 72.

[4] GODUNOY, S.; Équations de la Physique Mathématique, Editions Mir, Moscou, 1973.

[5] HALE, J. K.; Ordinary Differential Equations, Wiley - Intersience, 1969.

[6] HALE, J. K.; Theory of Functional Differential Equations - Springer-Verlag, 1977.

[7] HENRY, D.; Linear Autonomous Neutral Functional Differential Equations, J. Diff. Eq., 15(1974), 106 - 128.

[8] HENRY, D.; Geometric theory of semi-linear parabolic equations, University of Kentucky Lecture Notes, 1974.

[9] KATO, T.; Perturbation Theory for Linear Operators, Springer Verlag, 1966.

[10] KREĬN, S. G.; Linear Differential Equations in Banach Space, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 29; American Math. Soc., Providence, R. I., 1971.

[11] LEVIN, B. J_A.; Distribution of Zeros of Entire Functions, Translations of Math. Monographs, Vol. 5, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1964.

[12] LIMA, P.; Hopf Bifurcation in Equations with Infinite Delays, PhD. Thesis, Brown University (1977).

[13] LOPES, O. F.; Existência e Estabilidade de Oscilações Forçadas de Equações Diferenciais Funcionais. Tese de Livre-Docência, ICMSC - USP, São Carlos, SP., Brasil (1975).

[14] MARSDEN, J. E. & McCRACKEN; The Hopf Bifurcation and its Applications, Springer-Verlag, 1976.

[15] OLIVEIRA, J. C. F.; Hopf Bifurcation for Functional Differential Equations - Non-Linear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol. 4, Nº 2, (1980), 217-229.

[16] PAZY, A.; On The Applicability of Lyapunov's Theorem in Hilbert Space, Siam Journal of Math. Analysis, Vol. 3, Nº 2, (1972), 291 - 294.

[17] PAZY, A.; Semi-Groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, University of Maryland Lecture Notes, Vol. 10, (1974).

[18] PITT, H. R.; A Theorem on Absolutely Convergent Trigonometrical Series, J. Math. Phys. 16 (1937), 191 - 195.

[19] RIBEIRO, H. S.; Teoria Espectral para um Sistema Hiperbólico e Bifurcação de Hopf. Tese de Doutoramento, ICMSC--USP, São Carlos, SP., Brasil, (1980).

[20] SATTINGER, D. H.; Topics in Stability and Bifurcation Theory, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Nº 309, 1973.

[21] TITCHMARSH, E. C.; Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford University Press, 1937.